

# **Sheaves e Semantica Contestuale: Fasci di Significati su Spazi Topologici di Contesti**

## **Fondamenti Filosofici e Linguistici della Dipendenza Contestuale**

### **Capitolo 1: Il Problema della Dipendenza Contestuale del Significato**

#### **1.1 La Natura Pervasiva della Dipendenza Contestuale**

La semantica linguistica si confronta da sempre con un problema fondamentale che attraversa tutte le teorie del significato, dalla semantica formale alla pragmatica conversazionale, dalla filosofia del linguaggio alla linguistica cognitiva, dalla teoria della comunicazione all'analisi del discorso. Questo problema, che potremmo chiamare il problema della dipendenza contestuale del significato, riguarda il fatto ineludibile che il significato di un'espressione linguistica non è mai completamente determinato dalla sua forma sintattica o dal suo contenuto lessicale isolato, ma dipende in modo essenziale, sistematico e profondo dal contesto in cui tale espressione viene prodotta, trasmessa, ricevuta e interpretata.

Questa dipendenza contestuale non è un fenomeno marginale o eccezionale, una sorta di perturbazione che affligge solo certi usi particolari o devianti del linguaggio, come potrebbero essere le metafore poetiche o i giochi di parole deliberati. Al contrario, essa costituisce piuttosto la norma assoluta dell'uso linguistico concreto, la condizione ordinaria e quotidiana in cui il linguaggio funziona effettivamente nella comunicazione umana. Ogni enunciato, ogni frase pronunciata o scritta, ogni unità di comunicazione verbale è intrinsecamente immersa in un contesto multidimensionale che ne determina il significato in modi complessi e spesso sottili.

Consideriamo un esempio apparentemente semplice ma profondamente rivelatore. Quando qualcuno pronuncia la frase "Il banco è vuoto", il significato di questa espressione varia drammaticamente, radicalmente, in modo qualitativo e non solo quantitativo, a seconda del contesto comunicativo in cui si trova. Se ci troviamo in una scuola, in un'aula dove si svolgono lezioni, "banco" si riferisce naturalmente e immediatamente al banco scolastico, quel mobile tipicamente composto da un piano orizzontale dove gli studenti appoggiano quaderni e libri, spesso combinato con una seduta. In questo contesto, "Il banco è vuoto" significa che nessuno studente occupa attualmente quel banco, che il posto è libero, che quella postazione non è in uso.

Se invece la stessa identica sequenza fonetica viene pronunciata all'interno di una banca, in un ambiente finanziario dove si effettuano operazioni bancarie, "banco" si riferisce al banco

degli sportelli, alla postazione dove gli impiegati bancari servono i clienti, dove avvengono transazioni monetarie, depositi, prelievi e altre operazioni finanziarie. In questo contesto, "Il banco è vuoto" potrebbe significare che non ci sono clienti in fila davanti a quello sportello, oppure che lo sportello è temporaneamente chiuso e non presidiato da un impiegato.

Se ci spostiamo al mercato, in un contesto commerciale all'aperto o coperto dove i venditori offrono merci, "banco" indica il banco di vendita, il tavolo o la struttura espositiva dove il commerciante dispone i suoi prodotti per mostrarli ai potenziali acquirenti. "Il banco è vuoto" in questo contesto significa che il venditore ha esaurito la merce, che non ci sono prodotti in mostra, che lo stock disponibile si è esaurito o che il commerciante non è presente.

In un'aula di tribunale, in un contesto giudiziario, "banco" può riferirsi al banco degli imputati, quella particolare area dello spazio processuale dove siedono le persone accusate di reati durante le udienze. "Il banco è vuoto" in questo contesto assume connotazioni particolari: potrebbe significare che l'imputato non è comparso, che il processo è in attesa, che la seduta è stata rinviata.

La parola "banco" in tutti questi casi non cambia minimamente la sua forma fonologica, rimane identica nella sua realizzazione acustica con le sequenze di fonemi /b/, /a/, /n/, /k/, /o/. Non cambia nemmeno la sua forma morfologica, mantenendo la stessa struttura di nome maschile singolare, la stessa categoria grammaticale, le stesse proprietà sintattiche di combinarsi con articoli determinativi e aggettivi. Eppure, il suo significato, la sua denotazione, il suo riferimento concettuale, subisce trasformazioni radicali, mutamenti qualitativi profondi, in funzione del contesto comunicativo in cui l'espressione viene prodotta e interpretata.

Questo fenomeno non è limitato a "banco" come caso isolato. La polisemia contestuale permea profondamente il lessico delle lingue naturali. Consideriamo "testa": in contesti anatomici si riferisce alla parte superiore del corpo umano o animale che contiene il cervello e gli organi di senso principali; in contesti militari può indicare la punta avanzata di una formazione di truppe; in contesti tipografici si riferisce alla parte superiore di una pagina dove spesso compare il titolo o il numero di pagina; in contesti ferroviari indica l'estremità anteriore di un convoglio ferroviario dotata di locomotive. O prendiamo "correre": in contesti sportivi evoca competizioni atletiche regolamentate; in contesti quotidiani descrive semplicemente un movimento rapido; in contesti finanziari può significare il fluire del tempo rispetto a scadenze ("i tassi corrono"); in contesti informatici può riferirsi all'esecuzione di un programma.

## **1.2 Approcci Tradizionali alla Polisemia Contestuale**

Di fronte a questo fenomeno pervasivo e fondamentale, la linguistica teorica ha sviluppato nel corso della sua storia diverse strategie esplicative, diversi paradigmi teorici per dare conto della dipendenza contestuale del significato. Possiamo identificare due approcci principali, due macro-strategie che hanno dominato il dibattito teorico e che rappresentano poli opposti di un continuum concettuale.

### **1.2.1 L'Approccio Lessicalista: Polisemia come Molteplicità di Significati Discreti**

Il primo approccio, che potremmo chiamare "lessicalista" o "enumerativo", consiste fondamentalmente nel postulare che parole come "banco", "testa", "correre" e innumerevoli altre siano fondamentalmente e intrinsecamente polisemiche. Secondo questa prospettiva teorica, tali parole possiedono molteplici significati distinti, separati, discreti, ciascuno registrato in modo indipendente nel lessico mentale del parlante competente, nella rappresentazione cognitiva delle unità lessicali che costituisce parte della conoscenza linguistica di ogni individuo.

In questa visione, il lessico mentale funzionerebbe come una sorta di dizionario cognitivo dove ogni entrata lessicale può avere molteplici definizioni, multiple accezioni numerate. L'entrata per "banco" conterrebbe qualcosa come: banco<sub>1</sub> = mobile scolastico per studenti; banco<sub>2</sub> = sportello bancario per transazioni finanziarie; banco<sub>3</sub> = tavolo espositivo al mercato; banco<sub>4</sub> = postazione per imputati in tribunale; banco<sub>5</sub> = insieme di pesci che nuotano insieme; banco<sub>6</sub> = accumulo di sabbia o ghiaccio sottomarino; e così via attraverso tutte le accezioni convenzionalmente riconosciute nella comunità linguistica.

Il ruolo del contesto, in questo framework teorico, è relativamente limitato e principalmente selettivo. Il contesto comunicativo non crea o costruisce significati, non modifica o trasforma interpretazioni, ma serve semplicemente, meccanicamente, a selezionare quale tra questi significati pre-esistenti, già completamente specificati e immagazzinati nel lessico, sia rilevante, appropriato, saliente in una data occorrenza particolare dell'espressione. Il contesto funziona come un filtro o un interruttore che attiva una delle rappresentazioni semantiche disponibili disattivando le altre.

Questo approccio ha dalla sua parte alcune evidenze empiriche e alcuni vantaggi esplicativi non trascurabili. Innanzitutto, corrisponde abbastanza bene all'intuizione del parlante naïve, all'esperienza soggettiva di chi consulta un dizionario e trova effettivamente molteplici definizioni enumerate per molti lemmi. Inoltre, può spiegare fenomeni di disambiguazione rapida e automatica: se il contesto attiva immediatamente la rappresentazione corretta, l'interpretazione avviene senza sforzo cosciente. Infine, questo approccio può dar conto di certi aspetti di stabilità semantica: alcune accezioni sono riconosciute convenzionalmente e condivise nella comunità linguistica in modo abbastanza uniforme.

Tuttavia, l'approccio lessicalista presenta limitazioni significative, problemi teorici ed empirici che ne minano la plausibilità come teoria generale della dipendenza contestuale. Il primo problema è quello della proliferazione incontrollata di sensi. Se adottiamo il principio che ogni variazione contestuale del significato corrisponde a una accezione lessicale distinta, dove tracciamo i confini? Quante accezioni dobbiamo postulare per "banco"? Le varianti contestuali sono potenzialmente infinite o comunque estremamente numerose. Il "banco" in una scuola elementare ha sfumature diverse dal "banco" in un'aula universitaria (dimensioni diverse, aspettative comportamentali diverse, convenzioni d'uso diverse). Il "banco" in una banca commerciale differisce sottilmente dal "banco" in una banca d'investimento. Dobbiamo moltiplicare le accezioni per catturare tutte queste sfumature? E se lo facciamo, il lessico mentale diventa implausibilmente sovraffollato, richiedendo una capacità di memorizzazione enorme e irrealistica.

Il secondo problema riguarda le relazioni sistematiche tra accezioni. Le diverse interpretazioni di "banco" non sono completamente arbitrarie e disconnesse, ma mostrano

pattern di somiglianza e relazione. C'è una nozione astratta di "superficie elevata orizzontale usata per attività specifiche" che sembra sottostare a molte delle accezioni. L'approccio lessicalista, trattando ogni accezione come entità separata nel lessico, fatica a catturare queste regolarità, questi "ponti semantici" che collegano le varie interpretazioni. Perde la generalizzazione che esiste una struttura semantica comune, una famiglia di significati imparentati piuttosto che una lista arbitraria.

Il terzo problema concerne la produttività e la creatività lessicale. I parlanti sono perfettamente capaci di comprendere usi nuovi, estensioni inedite di parole in contesti mai incontrati prima. Se sento "Il banco è decorato con fiori", anche in un contesto mai sperimentato precedentemente (per esempio, un banco di chiesa durante una cerimonia), posso inferire cosa significa "banco" in quel contesto specifico estendendo creativamente la conoscenza lessicale. Ma se i significati sono tutti pre-elencati nel lessico, come spiego questa capacità produttiva di generare interpretazioni per usi nuovi?

Il quarto problema è di natura psicolinguistica ed riguarda i tempi di processamento. Se il contesto deve selezionare tra molteplici rappresentazioni discrete memorizzate, dovremmo osservare costi di accesso lessicale proporzionali al numero di accezioni: parole altamente polisemiche dovrebbero richiedere più tempo per essere processate perché il sistema deve scegliere tra più opzioni. Tuttavia, i dati sperimentali sulla polisemia sono complessi e non supportano uniformemente questa predizione. In molti casi, parole polisemiche non mostrano rallentamenti sistematici, suggerendo che il processamento non avviene tramite selezione tra liste di opzioni discrete.

### **1.2.2 L'Approccio Costruzionista: Significato Nucleare e Arricchimento Pragmatico**

Di fronte a queste difficoltà dell'approccio lessicalista, si è sviluppato un paradigma alternativo che potremmo definire "costruzionista", "inferenziale" o "sotto-specificazionista". Secondo questa prospettiva teorica, le espressioni linguistiche non possiedono molteplici significati distinti pre-immagazzinati, ma piuttosto un significato nucleare, astratto, scheletrico, sottodeterminato, che viene poi arricchito, modulato, specificato, completato attraverso processi di inferenza pragmatica basati sul contesto comunicativo.

In questa visione, il lessico mentale associa a ciascuna parola non una lista di accezioni complete, ma una rappresentazione semantica minimale, uno "scheletro" concettuale che cattura solo gli aspetti più stabili e invarianti del significato. Per "banco", questo nucleo semantico potrebbe essere qualcosa di estremamente astratto come "entità fisica tipicamente orizzontale e elevata rispetto al suolo, funzionalmente associata a qualche attività umana". Questa rappresentazione sottodeterminata non specifica di quale tipo di attività si tratti, quali siano le dimensioni tipiche, quale sia il materiale costitutivo, quale sia il contesto istituzionale di utilizzo.

Il contesto comunicativo, in questo framework, svolge un ruolo molto più attivo, costruttivo e creativo. Quando un'espressione viene prodotta e interpretata in un contesto specifico, il significato nucleare scheletrico viene arricchito attraverso processi inferenziali pragmatici. L'ascoltatore utilizza indizi contestuali di vario tipo per specificare i parametri lasciati aperti dal significato nucleare, per "riempire" gli slot vuoti nello schema semantico sottodeterminato, per completare la rappresentazione in modo appropriato alla situazione comunicativa.

Questi processi di arricchimento pragmatico operano secondo principi generali di ragionamento cooperativo e razionalità comunicativa. Un framework influente in questo ambito è la teoria delle implicature conversazionali di Herbert Paul Grice, secondo cui la comunicazione è governata da un Principio di Cooperazione e da massime conversazionali (di quantità, qualità, relazione, modo) che guidano tanto la produzione quanto l'interpretazione degli enunciati. L'ascoltatore assume che il parlante stia seguendo queste massime e inferisce informazioni non dette esplicitamente ma implicate dal rispetto di tali norme.

Applicato al nostro esempio, quando sento "Il banco è vuoto" in una scuola, riconosco dal contesto fisico, sociale e istituzionale che siamo in un ambiente educativo. Applicando principi di rilevanza e cooperazione, inferisco che il parlante intende riferirsi a entità rilevanti in quel contesto, ovvero mobili scolastici. Il significato nucleare astratto di "banco" viene quindi arricchito con specificazioni contestuali: banco = entità fisica orizzontale elevata + usata in contesti educativi + dove gli studenti si siedono + per seguire lezioni. Questo processo inferenziale avviene rapidamente, automaticamente, spesso al di sotto della soglia di consapevolezza cosciente, ma è in linea di principio ricostruibile razionalmente.

L'approccio costruzionista presenta vantaggi teorici significativi rispetto al lessicalismo. Primo, evita la proliferazione di sensi: invece di postulare centinaia di accezioni discrete, mantiene un unico nucleo semantico per ciascuna parola, rendendo il lessico mentale più parsimonioso e psicologicamente plausibile. Secondo, cattura la produttività interpretativa: poiché l'arricchimento pragmatico è un processo costruttivo guidato da principi generali, può generare interpretazioni per contesti nuovi mai incontrati precedentemente. Terzo, spiega le relazioni tra accezioni: le varie interpretazioni contestuali sono tutte specificazioni dello stesso nucleo astratto, quindi condividono naturalmente un "nucleo duro" di significato comune.

Tuttavia, anche l'approccio costruzionista incontra difficoltà teoriche ed empiriche non trascurabili. Il problema centrale riguarda l'indeterminatezza dei meccanismi di arricchimento: come esattamente il contesto opera queste modulazioni semantiche? Quali sono i principi precisi, formalmente specificabili, che governano l'arricchimento pragmatico? Il richiamo alle massime griceane fornisce vincoli normativi generali ma non un algoritmo computazionale esplicito. Due ascoltatori razionali e cooperativi, esposti allo stesso contesto, dovrebbero sempre convergere sulla stessa interpretazione arricchita? L'esperienza suggerisce di no: ci sono margini di variabilità interpretativa anche con contesto fisso. Questo indica che i processi inferenziali non sono completamente determinati, lasciando spazio a ambiguità residua.

Un secondo problema concerne il contenuto del significato nucleare. Quanto deve essere astratto e sottodeterminato questo nucleo? Se è troppo specifico, riemergono i problemi del lessicalismo (troppi nuclei diversi per catturare tutte le variazioni). Se è troppo astratto, diventa difficile spiegare come da uno schema quasi vuoto si arrivi a interpretazioni ricche e specifiche: il carico esplicativo si sposta interamente sui meccanismi pragmatici, che dovrebbero fare un lavoro inferenziale enorme. Trovare il giusto livello di astrazione per i significati nucleari è una sfida teorica aperta.

Un terzo problema è che alcune distinzioni tra accezioni sembrano lessicalizzate, convenzionalizzate in modo stabile nella comunità linguistica, piuttosto che essere puramente inferenze pragmatiche ad hoc. Per esempio, "banco di pesci" (aggregazione di animali marini) sembra così cristallizzato e idiomatico che trattarlo come arricchimento pragmatico contestuale appare forzato. Forse alcune accezioni sono effettivamente immagazzinate separatamente nel lessico, mentre altre emergono pragmaticamente: un approccio misto potrebbe essere necessario.

### **1.3 Verso un Nuovo Paradigma: La Prospettiva Topologica**

Entrambi gli approcci tradizionali alla polisemia contestuale, per quanto abbiano prodotto risultati empirici importanti, intuizioni teoriche preziose e stimolato decenni di ricerca fruttuosa nella semantica formale e nella pragmatica, presentano limitazioni significative che suggeriscono la necessità di un paradigma radicalmente diverso. Le difficoltà non sono meramente tecniche, questioni di dettaglio implementativo che potrebbero essere risolte con raffinamenti ulteriori delle teorie esistenti, ma sembrano piuttosto riflettere limiti concettuali più profondi, presupposti fondazionali che vincolano le possibilità esplicative.

Cosa accomuna, a livello profondo, l'approccio lessicalista e quello costruzionista, nonostante le loro differenze superficiali? Entrambi concepiscono i significati come entità discrete, atomiche, oggetti ben definiti che vengono manipolati attraverso operazioni determinate (selezione nel primo caso, arricchimento nel secondo). Entrambi trattano il contesto come una struttura esterna che interagisce con rappresentazioni semantiche già costituite in sé, piuttosto che come parte intrinseca della costituzione stessa del significato. Entrambi faticano a catturare l'aspetto genuinamente locale, distribuito, geometrico della dipendenza contestuale.

È qui che interviene la proposta radicale di questo saggio: applicare la teoria matematica dei fasci (sheaves) alla semantica contestuale. I fasci sono strutture della topologia algebrica e della geometria algebrica che offrono strumenti formali potenti, raffinati, matematicamente rigorosi per pensare alla dipendenza locale di quantità globali, esattamente il tipo di struttura che caratterizza il significato linguistico dipendente dal contesto.

L'intuizione centrale, il cuore concettuale di questo approccio, è che i contesti comunicativi possano e debbano essere organizzati in uno spazio topologico, una struttura matematica dove la topologia cattura relazioni di inclusione, sovrapposizione, vicinanza e compatibilità tra contesti. Non pensiamo più ai contesti come elementi discreti in un insieme piatto, ma come punti in uno spazio dotato di una geometria ricca, dove alcuni contesti sono "vicini" ad altri (condividono molte caratteristiche), alcuni si "sovrappongono" parzialmente (hanno intersezioni non banali), alcuni "includono" altri (sono generalizzazioni o specializzazioni).

I significati, a loro volta, non sono più pensati come entità atomiche pre-esistenti in un lessico mentale, né come costruzioni pragmatiche ad hoc, ma come sezioni di un fascio definito su questo spazio topologico di contesti. Una sezione di un fascio è una assegnazione coerente di "dati" (nel nostro caso, interpretazioni semantiche) a regioni dello spazio base (nel nostro caso, regioni contestuali) che rispetta vincoli di compatibilità locali. Le sezioni possono essere definite localmente su regioni contestuali limitate e poi, se soddisfano condizioni appropriate di coerenza sulle sovrapposizioni, possono essere "incollate" insieme per formare interpretazioni globali.

Questa prospettiva permette di formalizzare in modo matematicamente rigoroso e concettualmente illuminante come significati "locali", ovvero interpretazioni valide in contesti specifici e limitati, possano essere combinati, composti, unificati per formare interpretazioni "globali" coerenti che valgono su regioni contestuali più ampie. Al contempo, la teoria dei fasci fornisce strumenti precisi (la coomologia) per identificare e misurare le ostruzioni matematiche che impediscono tale incollamento, fornendo così una spiegazione formale profonda di fenomeni semantici problematici come l'ambiguità irrisolvibile, i paradossi pragmatici, le incompatibilità interpretative che resistono a ogni tentativo di risoluzione contestuale.

L'applicazione della teoria dei fasci alla semantica non è un mero esercizio di matematizzazione fine a se stessa, una semplice "vestizione" formale di idee linguistiche già perfettamente comprensibili in termini informali. Al contrario, risponde a esigenze teoriche profonde che emergono dall'analisi attenta dei fenomeni semantici stessi. La teoria dei fasci è nata storicamente, nel contesto della matematica del ventesimo secolo, proprio per affrontare situazioni in cui quantità definite localmente su pezzi di uno spazio devono essere compatibili globalmente quando incollate insieme. Questa è esattamente, precisamente, la situazione che si presenta paradigmaticamente nel caso del significato linguistico: abbiamo interpretazioni definite localmente in contesti specifici, e ci chiediamo quando e come queste interpretazioni locali possano coesistere come parte di un'interpretazione globale unificata.

Inoltre, la teoria dei fasci offre una generalizzazione naturale e matematicamente profonda delle logiche modali e della semantica dei mondi possibili di Kripke, framework teorico estremamente influente nella semantica formale e nella filosofia del linguaggio. La semantica di Kripke organizza i mondi possibili in una struttura discreta governata da una relazione binaria di accessibilità. La teoria dei fasci permette di pensare la modalità non più in termini discreti di accessibilità tra mondi separati, ma in termini continui di restrizioni ed estensioni di sezioni su aperti di uno spazio topologico. Questa generalizzazione non è meramente tecnica ma concettualmente significativa: permette di catturare sfumature modali, gradazioni di possibilità e necessità, strutture più ricche di quelle esprimibili nella semantica modale classica.

## **Capitolo 2: Motivazioni Storiche e Filosofiche per un Approccio Topologico**

### **2.1 Precedenti Storici: Geometria e Linguaggio**

L'idea di applicare concetti geometrici e topologici allo studio del linguaggio e del significato non è completamente nuova, anche se l'applicazione specifica della teoria dei fasci rappresenta un'innovazione significativa. Nella storia della linguistica e della filosofia del linguaggio possiamo trovare vari tentativi, più o meno espliciti e rigorosi, di pensare i fenomeni semantici in termini spaziali o geometrici.

Ferdinand de Saussure, padre fondatore della linguistica strutturale, concepiva il sistema linguistico come una rete di relazioni differenziali, dove il valore di ciascun segno è determinato non dalle sue proprietà intrinseche ma dalla sua posizione nella rete complessiva. Questa visione relazionale e strutturale ha affinità con l'idea di pensare significati come elementi di uno spazio strutturato. Sebbene Saussure non utilizzasse

formalismi topologici espliciti, la sua enfasi sulle relazioni paradigmatiche e sintagmatiche anticipa in modo notevole l'idea che i significati non siano atomi isolati ma nodi in una geometria complessa.

Ludwig Wittgenstein, nelle Ricerche Filosofiche, introduce la celebre metafora dei "giochi linguistici" e critica l'idea che le parole abbiano significati fissi e univoci. Wittgenstein osserva che il significato di un'espressione è determinato dal suo uso in contesti specifici, in "forme di vita" particolari. Sebbene Wittgenstein fosse notoriamente scettico riguardo alla formalizzazione matematica della semantica, la sua intuizione che i significati emergano da pratiche contestualizzate e che ci siano "somialtanze di famiglia" piuttosto che essenze comuni risuona profondamente con l'approccio topologico, dove significati sono sezioni che variano da contesto a contesto ma sono vincolate da relazioni di compatibilità locale.

Nella semantica formale contemporanea, Richard Montague ha sviluppato una teoria compositiva rigorosa dove i significati sono modellati come funzioni da indici (che includono parametri contestuali come mondo possibile, tempo, parlante) a estensioni. Questo approccio, pur non utilizzando esplicitamente la teoria dei fasci, cattura l'idea che i significati siano entità dipendenti da parametri contestuali in modo sistematico. L'innovazione che proponiamo qui è di organizzare questi "indici" o parametri contestuali non come semplici tuple ordinate ma come punti in uno spazio topologico, dove la topologia codifica relazioni strutturali tra contesti.

David Lewis, nella sua teoria della veridicità convenzionale e nella semantica dei controfattuali, lavora con spazi di mondi possibili equipaggiati con relazioni di similarità. Questi spazi di similarità hanno struttura quasi-metrica, e Lewis esplora come la valutazione semantica di costruzioni modali dipenda dalla topologia (nel senso intuitivo) dello spazio dei mondi. Sebbene Lewis non formalizzi questo in termini di teoria dei fasci, il suo lavoro suggerisce fortemente che strutture topologiche sono rilevanti per la semantica modale.

Nella linguistica cognitiva, George Lakoff e altri hanno proposto modelli dove i concetti sono organizzati in "spazi concettuali" con strutture di prototipo, radialità e gradiente. Lakoff parla di "categories as containers" e utilizza metafore spaziali per descrivere l'organizzazione concettuale. Sebbene questa tradizione sia meno formalista della semantica formale, l'intuizione che i concetti abbiano "geografia" interna, centri prototipici e periferie, è compatibile con l'idea di modellare significati usando strutture topologiche.

Più recentemente, nella semantica distribuzionale computazionale, i significati delle parole sono rappresentati come vettori in spazi vettoriali ad alta dimensione, dove la similarità semantica è catturata dalla prossimità geometrica. Questi "word embeddings" sono essenzialmente modelli geometrici del significato. La teoria dei fasci può essere vista come una generalizzazione categoriale e topologica di questi approcci vettoriali, dove invece di rappresentazioni vettoriali statiche abbiamo sezioni di fasci che variano coerentemente su spazi contestuali.

## **2.2 Fondamenti Filosofici: Realismo, Anti-Realismo e Strutturalismo Semantico**

L'adozione di un framework basato sulla teoria dei fasci ha anche implicazioni filosofiche profonde riguardo alla natura del significato e alla sua ontologia. Tradizionalmente, il dibattito filosofico sul significato si è polarizzato tra posizioni realiste, che trattano i significati come



entità oggettive esistenti indipendentemente dagli utenti del linguaggio, e posizioni anti-realiste o costruttiviste, che vedono i significati come costruzioni sociali o mentali senza realtà indipendente.

L'approccio tramite fasci suggerisce una posizione filosofica più sfumata, che potremmo chiamare "realismo strutturale semantico". Secondo questa visione, non esistono necessariamente significati come "oggetti platonici" indipendenti che attendono di essere scoperti, ma esistono strutture semantiche oggettive, relazioni topologiche tra contesti e vincoli di compatibilità tra interpretazioni locali, che sono matematicamente descrivibili e in qualche senso "reali" indipendentemente dalle credenze soggettive dei parlanti.

Questa posizione è analoga al realismo strutturale in filosofia della scienza, secondo cui ciò che la scienza scopre non sono tanto le essenze intrinseche delle entità (che possono essere epistemicamente inaccessibili) ma le strutture relazionali, le "forme" matematiche che governano i fenomeni. Applicato alla semantica, il realismo strutturale sostiene che ciò che è oggettivo e scopribile riguardo ai significati non sono "i significati in sé" come entità sostanziali, ma le strutture topologiche degli spazi contestuali, le proprietà coomologiche dei fasci semantici, i patterns di restrizione e incollamento.

Questa prospettiva dissolve in parte il dibattito tra teorie veritativo-condizionali e teorie dell'uso. Le teorie veritativo-condizionali, nella tradizione di Frege, Tarski e Davidson, identificano i significati con condizioni di verità, specificazioni di quando una proposizione è vera. Le teorie dell'uso, nella tradizione di Wittgenstein e Austin, identificano i significati con pattern di uso linguistico in contesti sociali. L'approccio tramite fasci può integrare entrambe le prospettive: le sezioni di un fascio semantico su una regione contestuale possono essere interpretate come specificazioni di condizioni di verità dipendenti dal contesto (prospettiva veritativo-condizionale), mentre la struttura topologica dello spazio contestuale codifica pattern di uso e relazioni pragmatiche (prospettiva dell'uso).

## Fondamenti Matematici della Teoria dei Fasci

### Capitolo 3: Spazi Topologici e la Geometria degli Aperti

#### 3.1 Definizione Assiomatica di Spazio Topologico

Prima di procedere all'applicazione della teoria dei fasci alla semantica linguistica, è assolutamente necessario e imprescindibile stabilire con precisione matematica rigorosa gli strumenti formali che utilizzeremo. La teoria dei fasci si colloca all'intersezione tra topologia generale, algebra astratta, geometria algebrica e teoria delle categorie, e richiede quindi una familiarità non superficiale con questi domini matematici. Procederemo per gradi, con metodo pedagogico progressivo, introducendo prima i concetti topologici fondamentali, poi la nozione di prefascio come generalizzazione di assegnazioni locali, quindi la definizione di fascio come prefascio che soddisfa condizioni aggiuntive di incollamento, e infine le operazioni categoriali sui fasci che permetteranno analisi semantiche sofisticate.

Uno spazio topologico è, nella sua definizione più generale e astratta, una coppia ordinata  $(X, \tau)$  costituita da due componenti matematiche distinte ma intimamente connesse. La prima componente  $X$  è un insieme arbitrario, che può essere finito o infinito, numerabile o

non numerabile, dotato o meno di strutture aggiuntive. Questo insieme  $X$  è chiamato spazio di base, spazio soggiacente o semplicemente insieme sottostante, e i suoi elementi sono chiamati punti dello spazio topologico. La seconda componente  $\tau$  è una collezione, ovvero un insieme di insiemi, specificatamente una collezione di sottoinsiemi di  $X$ . Gli elementi di  $\tau$ , ovvero i sottoinsiemi di  $X$  che appartengono a questa collezione privilegiata, sono chiamati aperti dello spazio topologico, o insiemi aperti, o semplicemente aperti quando il contesto è chiaro.

La collezione  $\tau$  non è una collezione arbitraria di sottoinsiemi, ma deve soddisfare tre assiomi fondamentali che la caratterizzano come topologia. Questi assiomi, formulati per la prima volta in modo esplicito da Felix Hausdorff nei primi decenni del ventesimo secolo, catturano proprietà intuitive di "apertura" o "regioni senza bordo" che vogliamo formalizzare.

Il primo assioma, assioma degli estremi o assioma banale, richiede che l'insieme vuoto  $\emptyset$  (il sottoinsieme di  $X$  che non contiene alcun elemento) e l'intero spazio  $X$  (il sottoinsieme di  $X$  che contiene tutti gli elementi) appartengano entrambi alla collezione  $\tau$ . Formalmente:  $\emptyset \in \tau$  e  $X \in \tau$ . Questo assioma stabilisce che i "casi limite" sono aperti: la regione che non contiene nulla è considerata aperta (vacuamente, senza bordi perché non c'è niente), e l'intera totalità dello spazio è aperta (non ha bordo esterno perché include tutto).

Il secondo assioma, assioma delle unioni arbitrarie o assioma di stabilità per unioni, richiede che l'unione di una famiglia arbitraria (finita o infinita, numerabile o non numerabile) di aperti sia ancora un aperto. Formalmente: se  $\{U_i\}_{i \in I}$  è una famiglia di elementi di  $\tau$  indicizzata da un insieme di indici  $I$  arbitrario (potenzialmente infinito non numerabile), allora l'unione  $\bigcup_{i \in I} U_i$  appartiene a  $\tau$ . Questo assioma cattura l'idea che se abbiamo molteplici "regioni aperte", anche la loro fusione totale, la regione che contiene tutti i punti che appartengono ad almeno una delle regioni originarie, è ancora una regione aperta. Non c'è limite al numero di aperti che possiamo unire: possiamo prendere l'unione di infiniti aperti e ottenere ancora un aperto.

Il terzo assioma, assioma delle intersezioni finite o assioma di stabilità per intersezioni finite, richiede che l'intersezione di una famiglia finita di aperti sia ancora un aperto. Formalmente: se  $U_1, U_2, \dots, U_n$  appartengono a  $\tau$  per qualche numero naturale finito  $n$ , allora l'intersezione  $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$  appartiene a  $\tau$ . Notare che questo assioma richiede solo che intersezioni finite producano aperti, non intersezioni arbitrarie. È perfettamente possibile, e succede comunemente, che l'intersezione di infiniti aperti non sia aperta. Questo è un aspetto asimmetrico della definizione di topologia: unioni arbitrarie sono permesse, intersezioni solo finite.

Perché questa asimmetria tra unioni e intersezioni? La risposta risiede nella concezione intuitiva di "regione aperta" come regione senza bordo. Quando uniamo regioni, anche infinite, otteniamo una regione più grande che può ancora essere senza bordo. Quando intersechiamo regioni, stiamo restringendo a ciò che è comune a tutte, e se intersechiamo infinitamente molte regioni, possiamo "convergere" verso un bordo, collassando a un insieme che ha bordo e quindi non è più aperto. Per esempio, nella topologia standard di  $\mathbb{R}$ , ciascun intervallo aperto  $(-1/n, 1/n)$  per  $n = 1, 2, 3, \dots$  è aperto, ma la loro intersezione infinita  $\bigcap_{n=1}^{\infty} (-1/n, 1/n) = \{0\}$  è un singolo punto, un insieme chiuso, non aperto.

Questi tre assiomi astratti, apparentemente semplici ma profondamente potenti, catturano l'idea matematica di "vicinanza", "prossimità", "continuità" senza richiedere necessariamente una nozione metrica esplicita di distanza numerica tra punti. Una topologia è una struttura più generale di una metrica: ogni spazio metrico induce naturalmente una topologia (dove gli aperti sono definiti come unioni arbitrarie di palle aperte), ma non ogni topologia proviene da una metrica. Ci sono spazi topologici che non sono metrizzabili, che non possono essere dotati di alcuna funzione distanza che generi la topologia data.

Un insieme  $U$  è aperto nella topologia  $\tau$  se, intuitivamente parlando, attorno a ogni suo punto c'è "spazio", c'è un intorno interamente contenuto in  $U$ , c'è margine prima di raggiungere il "bordo" (se esiste). Gli aperti sono gli ingredienti fondamentali, gli atomi costruttivi, della teoria dei fasci perché rappresentano i "contesti locali", le "regioni contestuali" su cui le sezioni del fascio saranno definite.

### 3.2 Esempi Fondamentali di Spazi Topologici

Per concretizzare queste definizioni astratte e sviluppare intuizione geometrica, consideriamo alcuni esempi fondamentali di spazi topologici che ricorreranno nelle applicazioni semantiche.

#### 3.2.1 Topologia Discreta

Dato un insieme arbitrario  $X$ , possiamo definire la topologia discreta  $\tau_{\text{disc}}$  come la collezione di tutti i sottoinsiemi di  $X$ :  $\tau_{\text{disc}} = P(X)$ , dove  $P(X)$  denota l'insieme potenza di  $X$ , l'insieme di tutti i sottoinsiemi. In questa topologia, ogni sottoinsieme è aperto. La topologia discreta è la topologia "più fine" possibile su  $X$ , quella che distingue massimamente tra punti: ogni singolo punto  $\{x\}$  è un aperto (un "singleton aperto"), quindi i punti sono completamente isolati gli uni dagli altri topologicamente.

Nella topologia discreta, le uniche convergenze sono quelle banali (una sequenza costante converge al suo valore), le uniche funzioni continue verso uno spazio con topologia discreta sono tutte le funzioni possibili (perché ogni sottoinsieme del codominio è aperto, la controimmagine di qualsiasi aperto è sempre aperta), e ogni sottoinsieme è sia aperto che chiuso. La topologia discreta modella situazioni dove non c'è struttura di vicinanza significativa: tutti i punti sono equidistanti nel senso topologico, completamente separati.

Nelle applicazioni semantiche, potremmo utilizzare topologie discrete quando vogliamo modellare contesti radicalmente distinti senza gradazioni o sovrapposizioni: per esempio, un insieme di "generi testuali" completamente separati (poesia, prosa scientifica, dialogo teatrale, testo legale) dove non vogliamo catturare somiglianze o continuità tra generi.

#### 3.2.2 Topologia Indiscreta (Topologia Banale)

All'estremo opposto, dato un insieme  $X$ , la topologia indiscreta o banale  $\tau_{\text{indisc}}$  è la collezione minimale che soddisfa gli assiomi:  $\tau_{\text{indisc}} = \{\emptyset, X\}$ . Questa topologia contiene solo i due aperti obbligatori, il vuoto e l'intero spazio. È la topologia "meno fine" possibile, quella che distingue minimamente: non possiamo separare punti usando aperti, perché gli unici aperti sono banali.

Nella topologia indiscreta, tutte le sequenze convergono a tutti i punti (perché ogni intorno di qualsiasi punto è l'intero spazio), le uniche funzioni continue da uno spazio con topologia indiscreta sono le funzioni costanti (o quasi), e c'è massima identificazione topologica. Questa topologia è troppo grossolana per la maggior parte delle applicazioni, ma può modellare situazioni estreme di completa indifferenziazione contestuale.

### 3.2.3 Topologia Euclidea su $\mathbb{R}^n$

La topologia standard su  $\mathbb{R}^n$ , lo spazio euclideo n-dimensionale, è generata dalle palle aperte, dove una palla aperta di raggio  $r > 0$  centrata in un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  è definita come  $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}$ , usando la norma euclidea. Gli aperti della topologia euclidea sono precisamente le unioni arbitrarie di palle aperte. Equivalentemente, un sottoinsieme  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  è aperto se e solo se per ogni punto  $x \in U$  esiste un raggio  $r > 0$  tale che  $B(x, r) \subseteq U$ .

Questa topologia cattura la nozione geometrica intuitiva di "continuità": gli intervalli aperti  $(a, b)$  in  $\mathbb{R}$  sono aperti, i dischi aperti  $\{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$  in  $\mathbb{R}^2$  sono aperti, e così via. La topologia euclidea è metrizzabile (proviene dalla metrica euclidea) ed è anche Hausdorff, ovvero punti distinti possono essere separati da aperti disgiunti.

Nelle applicazioni semantiche, potremmo usare topologie euclidee o sub-euclidee quando i contesti hanno parametri numerici continui: per esempio, se una dimensione contestuale è il "tempo di enunciazione" (modellato come  $\mathbb{R}$ ), la topologia euclidea su questa componente cattura naturalmente la continuità temporale, il fatto che istanti vicini nel tempo costituiscono contesti vicini.

### 3.2.4 Topologie Prodotto

Data una famiglia di spazi topologici  $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ , possiamo costruire lo spazio prodotto  $X = \prod_{i \in I} X_i$  (il prodotto cartesiano degli insiemi  $X_i$ ) dotato della topologia prodotto  $\tau_{\text{prod}}$ . Un aperto base della topologia prodotto è un prodotto di aperti dove solo finitamente molti fattori sono aperti propri (diversi dall'intero spazio): un aperto base ha la forma  $\prod_{i \in I} U_i$  dove  $U_i \in \tau_i$  per ogni  $i$ , ma  $U_i = X_i$  per tutti tranne finitamente molti indici  $i$ . La topologia prodotto è la topologia meno fine che rende continue tutte le proiezioni  $\pi_j : X \rightarrow X_j$ .

La topologia prodotto è cruciale nelle applicazioni semantiche perché lo spazio contestuale sarà tipicamente un prodotto di molteplici componenti (spazio linguistico  $\times$  spazio situazionale  $\times$  spazio sociale  $\times$  ...), e la topologia prodotto è la scelta naturale per dotare questo prodotto cartesiano di una struttura topologica che rispetti le strutture delle componenti.

### 3.2.5 Topologia Alessandrina

Una topologia  $\tau$  su un insieme  $X$  è alessandrina se intersezioni arbitrarie (non solo finite) di aperti sono ancora aperti. Equivalentemente,  $\tau$  è alessandrina se e solo se ogni punto  $x \in X$  ha un intorno aperto minimale  $U_x$  (il più piccolo aperto che contiene  $x$ ), e ogni aperto è unione di tali intorni minimali.

Le topologie alessandrine hanno una corrispondenza biunivoca con i preordini (relazioni riflessive e transitive) su  $X$ : data una topologia alessandrina  $\tau$ , possiamo definire una relazione  $x \leq y$  se e solo se  $x$  appartiene alla chiusura di  $\{y\}$ , oppure equivalentemente se  $y$

$\in U_x$  dove  $U_x$  è l'intorno minimale di  $x$ . Viceversa, dato un preordine  $\leq$ , possiamo definire  $\tau$  come la collezione di tutti i sottoinsiemi "up-closed" (se  $x \in U$  e  $x \leq y$  allora  $y \in U$ ).

Le topologie alessandrine sono rilevanti per la semantica perché i frames di Kripke  $(W, R)$  utilizzati nella semantica modale sono precisamente spazi alessandrini dove la relazione di accessibilità  $R$  corrisponde al preordine topologico. Questo fornirà il ponte tra semantica di Kripke e teoria dei fasci che esploreremo più avanti.

### 3.3 Basi e Subbasi Topologiche

Non è sempre necessario specificare esplicitamente tutti gli aperti di una topologia. Spesso è sufficiente specificare una base o una subbase, ovvero una collezione più piccola di insiemi da cui tutti gli aperti possono essere generati mediante unioni e intersezioni finite.

Una base per una topologia  $\tau$  su  $X$  è una collezione  $B \subseteq \tau$  di aperti tale che ogni aperto  $U \in \tau$  può essere espresso come unione di elementi di  $B$ . Formalmente, per ogni  $U \in \tau$  e ogni  $x \in U$ , esiste  $B \in B$  tale che  $x \in B \subseteq U$ . Intuitivamente, la base  $B$  consiste di "aperti fondamentali" che generano tutti gli altri per unione. Per esempio, nella topologia euclidea su  $\mathbb{R}$ , la collezione di tutti gli intervalli aperti  $\{(a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$  è una base. Anche la collezione di intervalli aperti con estremi razionali  $\{(p, q) : p < q \in \mathbb{Q}\}$  è una base (più piccola e numerabile).

Una subbase per  $\tau$  è una collezione  $S$  di sottoinsiemi di  $X$  tale che la collezione di tutte le intersezioni finite di elementi di  $S$  forma una base per  $\tau$ . La topologia generata da una subbase  $S$  è la topologia meno fine che contiene  $S$ . Le subbasi sono utili per specificare topologie in modo ancora più economico.

Nelle costruzioni semantiche, spesso specificheremo lo spazio contestuale dando una base o subbase piuttosto che enumerare tutti gli aperti esplicitamente, rendendo la definizione più trattabile.

### 3.4 Chiusi, Interni, Chiusure e Bordi

Duale alla nozione di aperto è quella di chiuso. Un sottoinsieme  $F \subseteq X$  è chiuso se il suo complemento  $X \setminus F$  è aperto. Per gli assiomi topologici, l'insieme vuoto e l'intero spazio sono chiusi (perché i loro complementi sono aperti per il primo assioma), intersezioni arbitrarie di chiusi sono chiusi (perché complemento commuta con unione trasformandola in intersezione), e unioni finite di chiusi sono chiusi (perché complemento commuta con intersezione finita trasformandola in unione finita).

Notare che un insieme può essere simultaneamente aperto e chiuso ("clopen"), può essere né aperto né chiuso, può essere solo aperto o solo chiuso. Nella topologia discreta tutti gli insiemi sono clopen. Nella topologia euclidea su  $\mathbb{R}$ , l'intervallo  $(0, 1)$  è aperto ma non chiuso, l'intervallo  $[0, 1]$  è chiuso ma non aperto, l'intervallo  $[0, 1)$  è né aperto né chiuso, e l'intero  $\mathbb{R}$  è clopen.

Dato un sottoinsieme  $A \subseteq X$ , possiamo definire varie operazioni topologiche:

- L'interno di  $A$ , denotato  $\text{Int}(A)$  o  $A^\circ$ , è il più grande aperto contenuto in  $A$ . Equivalentemente, è l'unione di tutti gli aperti contenuti in  $A$ .

- La chiusura di  $A$ , denotata  $Cl(A)$  o  $\bar{A}$ , è il più piccolo chiuso che contiene  $A$ . Equivalentemente, è l'intersezione di tutti i chiusi che contengono  $A$ .
- Il bordo di  $A$ , denotato  $\partial A$  o  $Fr(A)$ , è l'insieme  $Cl(A) \setminus Int(A)$ , ovvero i punti che sono in ogni intorno sia di punti in  $A$  che di punti fuori da  $A$ .

Queste operazioni soddisfano identità notevoli, gli assiomi di Kuratowski:  $Cl(\emptyset) = \emptyset$ ,  $A \subseteq Cl(A)$ ,  $Cl(Cl(A)) = Cl(A)$ ,  $Cl(A \cup B) = Cl(A) \cup Cl(B)$ . Analogamente per l'interno.

Nelle applicazioni semantiche, l'interno di una regione contestuale rappresenta i contesti "genuinamente" in quella regione, chiaramente distinti dal bordo. La chiusura include anche contesti "al limite". Il bordo rappresenta contesti ambigui che potrebbero appartenere o meno alla regione.

## Capitolo 4: Prefasci - Assegnazioni Locali di Dati

### 4.1 Definizione Categoriale di Prefascio

Un prefascio  $F$  su uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è, nella sua formulazione categoriale più generale e astratta, un funtore controvariante dalla categoria degli aperti di  $X$  (denotata  $Open(X)$ ) a una categoria target  $C$ , tipicamente la categoria degli insiemi  $Set$ , degli anelli  $Ring$ , dei gruppi abeliani  $Ab$ , dei moduli su un anello fissato, degli spazi vettoriali  $VectK$  su un campo  $K$ , o altre categorie con struttura algebrica.

Scomponiamo questa definizione formale e apparentemente intimidatoria in componenti più intuitive e accessibili, costruendo il concetto passo dopo passo.

Primo, dobbiamo chiarire cosa intendiamo per "categoria degli aperti di  $X$ ". Gli aperti di  $X$ , ovvero gli elementi della topologia  $\tau$ , formano naturalmente una categoria denotata  $Open(X)$  o  $O(X)$ , dove:

- Gli oggetti della categoria sono gli aperti stessi:  $Obj(Open(X)) = \tau$ .
- I morfismi tra due aperti  $U$  e  $V$  sono le inclusioni: esiste un unico morfismo  $U \rightarrow V$  se e solo se  $U \subseteq V$  come sottoinsiemi di  $X$ . Se  $U \subseteq V$  non vale, non c'è morfismo da  $U$  a  $V$ . Se  $U \subseteq V$ , indichiamo il morfismo di inclusione come  $i_{\{U,V\}} : U \rightarrow V$  o semplicemente  $U \subseteq V$  quando il contesto è chiaro.
- La composizione di morfismi è la transitività delle inclusioni: se  $U \subseteq V$  e  $V \subseteq W$ , allora  $U \subseteq W$ , e la composizione dei morfismi corrispondenti è l'inclusione  $U \subseteq W$ .
- Il morfismo identità su un aperto  $U$  è l'inclusione banale  $U \subseteq U$ .

Questa categoria  $Open(X)$  è un esempio di categoria parzialmente ordinata (poset visto come categoria), dove c'è al massimo un morfismo tra due oggetti, e la presenza di un morfismo corrisponde a una relazione d'ordine (l'inclusione insiemistica).

Secondo, dobbiamo chiarire cosa significa "funtore controvariante". Un funtore controvariante da  $Open(X)$  a una categoria  $C$  è una mappa che:

- Assegna a ogni oggetto  $U \in Open(X)$  un oggetto  $F(U) \in C$ .
- Assegna a ogni morfismo  $U \subseteq V$  in  $Open(X)$  un morfismo  $F(V) \rightarrow F(U)$  in  $C$  (notare l'inversione della direzione! Controvariante significa che la freccia si inverte).

- Preserva composizioni in modo controvariante: se  $U \subseteq V \subseteq W$ , allora il morfismo  $F(W) \rightarrow F(U)$  associato a  $U \subseteq W$  deve essere la composizione  $F(W) \rightarrow F(V) \rightarrow F(U)$ .
- Preserva identità: il morfismo  $F(U) \rightarrow F(U)$  associato a  $U \subseteq U$  è l'identità su  $F(U)$ .

Vediamo ora come questo si traduce concretamente quando  $C = \text{Set}$ , il caso più semplice e fondamentale.

Un prefascio di insiemi  $F$  su  $X$  assegna:

- A ogni aperto  $U \in \tau$ , un insieme  $F(U)$ , chiamato l'insieme delle sezioni di  $F$  su  $U$ .
- A ogni inclusione di aperti  $V \subseteq U$ , una funzione  $\rho_{\{U,V\}} : F(U) \rightarrow F(V)$ , chiamata mappa di restrizione.

Gli elementi di  $F(U)$ , chiamati sezioni di  $F$  su  $U$ , possono essere pensati intuitivamente come "dati" o "valori" o "informazioni" che il prefascio "vive su" o "è definito su" l'aperto  $U$ . Nel nostro contesto semantico,  $F(U)$  sarà l'insieme delle possibili interpretazioni o significati che un'espressione linguistica può avere quando considerata nella regione contestuale rappresentata da  $U$ .

La mappa di restrizione  $\rho_{\{U,V\}} : F(U) \rightarrow F(V)$  per  $V \subseteq U$  ha un'interpretazione intuitiva profonda: prende una sezione  $s \in F(U)$  definita sull'aperto più grande  $U$  e la "restringe" all'aperto più piccolo  $V$ , producendo una sezione  $s|_V \in F(V)$ . Denotiamo comunemente  $s|_V = \rho_{\{U,V\}}(s)$ , leggendo "s ristretto a  $V$ " o "la restrizione di  $s$  a  $V$ ".

Questa restrizione cattura l'idea che se abbiamo un'interpretazione, un significato, un dato valido su una regione contestuale ampia  $U$ , possiamo sempre "focalizzarci" su una sotto-regione  $V \subseteq U$  ottenendo un'interpretazione coerente ma potenzialmente più specifica, più dettagliata, più raffinata per quel contesto più ristretto.

Le mappe di restrizione devono soddisfare due condizioni naturali, assiomatiche, che garantiscono la coerenza del sistema:

**Assioma di Identità:** La restrizione di una sezione a se stessa è l'identità. Formalmente,  $\rho_{\{U,U\}} : F(U) \rightarrow F(U)$  è la funzione identità  $\text{id}_{\{F(U)\}}$ . In altre parole, "restringere" una sezione all'aperto dove già vive non la modifica. Questo è ovvio intuitivamente: se ho un'interpretazione valida su  $U$  e chiedo quale sia la sua restrizione a  $U$  stesso, ottengo la stessa interpretazione.

**Assioma di Composizionalità (o Transitività):** Le restrizioni si compongono in modo coerente. Formalmente, se abbiamo tre aperti  $W \subseteq V \subseteq U$ , allora restringere prima da  $U$  a  $V$  e poi da  $V$  a  $W$  dà lo stesso risultato che restringere direttamente da  $U$  a  $W$ :  $\rho_{\{V,W\}} \circ \rho_{\{U,V\}} = \rho_{\{U,W\}}$ . In altre parole, le restrizioni sono transitive e non importa se le facciamo in un colpo solo o per tappe intermedie. Se ho un'interpretazione su  $U$ , la posso prima restringere a  $V$  e poi a  $W$ , oppure direttamente a  $W$ , ottenendo lo stesso risultato.

Questi due assiomi garantiscono che le mappe di restrizione formino un sistema coerente che rispetta la struttura d'ordine degli aperti.

## 4.2 Sezioni Locali e Germi

Una sezione di un prefascio  $F$  su un aperto  $U$  è semplicemente un elemento  $s \in F(U)$ . Chiamiamo queste sezioni "locali" quando  $U$  è un aperto proprio non banale, per distinguerle dalle "sezioni globali" che sono elementi di  $F(X)$ , definite sull'intero spazio.

Un concetto importante correlato è quello di germe. Fissato un punto  $x \in X$ , consideriamo tutte le sezioni definite su aperti che contengono  $x$ . Due sezioni  $s \in F(U)$  e  $t \in F(V)$ , dove  $x \in U$  e  $x \in V$ , sono equivalenti come germi in  $x$  se concordano su un intorno di  $x$ , ovvero se esiste un aperto  $W \subseteq U \cap V$  con  $x \in W$  tale che  $s|_W = t|_W$ . Questa è una relazione di equivalenza, e le classi di equivalenza sono chiamate germi di  $F$  in  $x$ , denotati  $F_x$ .

Il germe  $[s]_x$  di una sezione  $s \in F(U)$  in un punto  $x \in U$  cattura "l'informazione locale che  $s$  porta attorno a  $x$ ", astruendo dal dominio specifico  $U$  e concentrandosi solo sul comportamento nelle immediate vicinanze di  $x$ . I germi sono cruciali in geometria algebrica e analisi complessa, e nelle applicazioni semantiche possono rappresentare "interpretazioni infinitesimalmente locali", il significato "esattamente qui" in un contesto puntuale  $x$ , indipendentemente da come estendiamo questo significato a regioni più ampie.

### 4.3 Esempi di Prefasci

Consideriamo alcuni esempi concreti di prefasci per sviluppare intuizione.

#### 4.3.1 Prefascio delle Funzioni Continue

Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $Y$  un altro spazio topologico, per esempio  $\mathbb{R}$  con la topologia euclidea. Definiamo un prefascio  $C(-, Y)$  su  $X$  ponendo:

- $C(U, Y) = \{f : U \rightarrow Y : f \text{ è continua}\}$
- $\rho_{\{U, V\}}(f) = f|_V$  (restrizione usuale di funzioni)

Questo è un prefascio: la restrizione di una funzione continua a un sottospazio è continua, e le restrizioni si compongono transitivamente come richiesto dagli assiomi.

Nelle applicazioni semantiche, potremmo usare questo prefascio se volessimo modellare significati come funzioni continue da contesti a valori semantici in qualche spazio  $Y$ .

#### 4.3.2 Prefascio Costante

Dato un insieme  $A$ , possiamo definire il prefascio costante  $C_A$  su  $X$  ponendo:

- $C_A(U) = A$  per ogni aperto  $U$  non vuoto
- $\rho_{\{U, V\}}(a) = a$  (la mappa di restrizione è sempre l'identità)

Questo prefascio assegna lo stesso insieme di sezioni a ogni aperto (non vuoto), e le restrizioni non cambiano le sezioni. Intuitivamente, modella dati che sono completamente indipendenti dalla regione, invarianti contestualmente. In semantica, un prefascio costante potrebbe modellare un termine completamente context-independent, che ha lo stesso significato in ogni contesto.

#### 4.3.3 Prefascio dei Sottoinsiemi

Definiamo un prefascio  $S$  su  $X$  ponendo:



- $S(U) = \{A : A \subseteq U\}$
- $\rho_{\{U,V\}}(A) = A \cap V$  per  $A \subseteq U$  e  $V \subseteq U$

Questo prefascio assegna a ogni aperto l'insieme dei suoi sottoinsiemi, e la restrizione interseca con l'aperto più piccolo. Questo è un esempio fondamentale di prefascio che si comporta in modo interessante rispetto alla condizione di fascio.

## Capitolo 5: Fasci - La Condizione di Incollamento e le Sue Conseguenze

### 5.1 La Definizione di Fascio: Dall'Assegnazione Locale all'Incollamento Globale

La differenza cruciale, fondamentale, concettualmente profonda tra un prefascio e un fascio risiede in una proprietà aggiuntiva, una condizione ulteriore che i fasci devono soddisfare oltre agli assiomi base dei prefasci. Questa proprietà è chiamata condizione di incollamento, assioma del fascio, proprietà di sheaf, o condizione di compatibilità locale, e formalizza matematicamente l'idea intuitiva ma potente che sezioni locali definite su una copertura di un aperto, che sono compatibili tra loro sulle sovrapposizioni, possano e debbano essere "incollate" insieme in modo univoco per formare una sezione globale sull'unione.

Questa condizione ha due componenti distinte ma complementari, che insieme catturano completamente l'essenza dei fasci:

**Assioma di Località (Unicità, Injectivity):** Se abbiamo due sezioni globali su un aperto  $U$  che concordano localmente su ogni pezzo di un ricoprimento di  $U$ , allora sono identiche globalmente.

**Assioma di Incollamento (Esistenza, Gluing):** Se abbiamo una famiglia di sezioni locali su pezzi di un ricoprimento di  $U$  che concordano sulle sovrapposizioni, allora esiste un'unica sezione globale su  $U$  che estende tutte le sezioni locali.

Formalizziamo ora queste idee con precisione matematica. Sia  $F$  un prefascio su uno spazio topologico  $X$ , sia  $U$  un aperto in  $X$ , e sia  $\{U_i\}_{i \in I}$  una famiglia di aperti indicizzata da un insieme  $I$  tale che  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Diciamo che  $\{U_i\}_{i \in I}$  è un ricoprimento aperto (o semplicemente ricoprimento) di  $U$ . Notare che i ricoprimenti possono avere sovrapposizioni: gli  $U_i$  non devono essere disgiunti, anzi tipicamente si sovrappongono.

Il prefascio  $F$  è un fascio se e solo se per ogni aperto  $U$  e ogni ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$  di  $U$ , valgono le seguenti due condizioni:

**Condizione 1 - Località (Unicità):** Se  $s, t \in F(U)$  sono due sezioni su  $U$  tali che per ogni  $i \in I$  si ha  $s|_{U_i} = t|_{U_i}$  (ovvero  $\rho_{\{U, U_i\}}(s) = \rho_{\{U, U_i\}}(t)$ ), allora  $s = t$ .

Interpretativamente: una sezione globale è completamente determinata dalle sue restrizioni ai pezzi di un ricoprimento. Non c'è "informazione nascosta" che esiste globalmente ma non si manifesta localmente. Se due interpretazioni sono indistinguibili quando esaminate localmente su tutti i pezzi che ricoprono il contesto, allora sono la stessa interpretazione.

**Condizione 2 - Incollamento (Esistenza):** Data una famiglia di sezioni locali  $\{s_i \in F(U_i)\}_{i \in I}$  (una sezione  $s_i$  per ogni pezzo  $U_i$  del ricoprimento) che soddisfano la

*condizione di compatibilità sulle sovrapposizioni, ovvero per ogni coppia di indici  $i, j \in I$  si ha:  $s_i|_{\{U_i \cap U_j\}} = s_j|_{\{U_i \cap U_j\}}$  (le due sezioni concordano quando ristrette all'intersezione dei loro domini), allora esiste una sezione globale  $s \in F(U)$  tale che  $s|_{\{U_i\}} = s_i$  per ogni  $i \in I$ .*

Inoltre, per la condizione di località, questa sezione globale  $s$  è unica: non possono esistere due diverse sezioni globali che estendono la stessa famiglia compatibile di sezioni locali.

Interpretativamente: se abbiamo interpretazioni locali definite su varie regioni contestuali che ricoprono un contesto più ampio, e queste interpretazioni locali sono mutuamente compatibili (ovvero concordano quando le confrontiamo sulle sovrapposizioni delle regioni), allora queste interpretazioni locali possono essere amalgamate, incollate, unificate in un'unica interpretazione globale coerente che vale sull'intero contesto. E questa unificazione è unica: non ci sono ambiguità su come incollare.

## 5.2 Significato Semantico delle Condizioni di Fascio

Le due condizioni del fascio hanno significati semantici profondi che meritano un'analisi dettagliata.

### 5.2.1 Località: Anti-Olismo e Determinazione Locale del Significato Globale

La condizione di località formalizza una forma di anti-olismo semantico, una restrizione contro forme estreme di olismo secondo cui il significato globale di un'espressione in un contesto potrebbe trascendere, superare, essere qualitativamente diverso dalla somma delle sue manifestazioni locali in tutti i sottocontesti che costituiscono quel contesto.

Secondo la località, il significato globale non contiene "emergenza selvaggia", non può avere proprietà che non si riflettono in alcun modo nelle sue restrizioni locali. Se vogliamo determinare se due interpretazioni globali  $s$  e  $t$  sono identiche, non abbiamo bisogno di un confronto "olistico", ineffabile, della totalità globale. È sufficiente, necessario e sufficiente, controllare che  $s$  e  $t$  concordino localmente su tutti i pezzi di un ricoprimento. Se concordano pezzo per pezzo, devono essere identiche globalmente.

Questo principio ha conseguenze epistemologiche: per conoscere un'interpretazione globale, è sufficiente conoscere le sue manifestazioni locali su una copertura. Non c'è informazione semantica "nascosta nel globale" che sfugge all'analisi locale. Possiamo sempre passare dal locale al globale senza perdere informazione, perché la località garantisce che la mappa di restrizione  $F(U) \rightarrow \prod_{\{i \in I\}} F(U_i)$  definita da  $s \mapsto (s|_{\{U_i\}})_{\{i \in I\}}$  sia iniettiva: diverse sezioni globali producono diverse tuple di restrizioni.

Tuttavia, è importante sottolineare che la località non esclude tutte le forme di olismo semantico. Ammette un "olismo debole" nel senso che per conoscere l'interpretazione in un sottocontesto  $U_i$ , potrebbe essere necessario considerare l'interpretazione su un contesto più ampio  $U$  che lo contiene e poi restringere. Non stiamo dicendo che i significati locali siano indipendenti dal contesto più ampio, ma che non ci sono "salti qualitativi" non riducibili a compatibilità locali.

### 5.2.2 Incollamento: Coerenza Locale Implica Esistenza Globale

La condizione di incollamento formalizza l'idea che non ci sono ostruzioni arbitrarie, misteriose, alla formazione di significati globali a partire da significati locali compatibili. Se le interpretazioni locali su vari sottocontesti sono tutte mutuamente consistenti, ovvero concordano quando confrontate sulle sovrapposizioni, allora necessariamente, inevitabilmente, esiste un'interpretazione globale che le unifica tutte.

Questa è una condizione di "chiusura costruttiva": dato il materiale locale (le sezioni  $s_i$ ), se soddisfa i vincoli di coerenza (compatibilità sulle intersezioni), possiamo costruire, produrre, generare il dato globale (la sezione  $s$ ). Non abbiamo bisogno di verifiche aggiuntive, non ci sono ulteriori condizioni misteriose da soddisfare. La compatibilità locale è necessaria e sufficiente per l'esistenza globale.

In termini semantici, questo significa che se abbiamo interpretazioni valide in vari sottocontesti che non contraddicono tra loro quando i sottocontesti si sovrappongono, allora possiamo formare un'interpretazione globale coerente sull'unione dei sottocontesti. Non esistono fenomeni di "incoerenza olistica" dove le parti sono localmente consistenti ma il tutto è globalmente impossibile.

La condizione di incollamento è anche predittiva: ci dice che certi significati globali devono esistere se le componenti locali sono date correttamente. Questo può guidare la ricerca semantica: se stiamo cercando l'interpretazione di un'espressione in un contesto complesso  $U$ , possiamo decomporre  $U$  in sottocontesti  $U_i$  più semplici, analizzare l'interpretazione in ciascun  $U_i$ , verificare la compatibilità, e poi l'incollamento garantisce che c'è un'unica interpretazione globale.

### 5.3 Quando un Prefascio non è un Fascio: Controesempi Illuminanti

Non tutti i prefasci sono fasci. Esistono prefasci che violano una o entrambe le condizioni di fascio, e questi controesempi sono didatticamente preziosi per comprendere cosa la condizione di fascio richiede veramente.

#### 5.3.1 Violazione della Località: Prefascio delle Funzioni Limitate

Consideriamo lo spazio topologico  $X = \mathbb{R}$  con la topologia euclidea standard. Definiamo il prefascio  $B$  delle funzioni reali limitate:

- $B(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è limitata}\}$ , ovvero funzioni  $f$  tali che esistono  $M \in \mathbb{R}$  con  $|f(x)| \leq M$  per ogni  $x \in U$
- Le mappe di restrizione sono le usuali restrizioni di funzioni

Questo è un prefascio (le restrizioni si comportano correttamente), ma non è un fascio perché viola la località. Consideriamo  $U = \mathbb{R}$  e il ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in I}$  dove  $U_i = (-i, i)$  per  $i \in \mathbb{N}$ , ovvero intervalli aperti centrati in zero di lunghezza crescente. Chiaramente  $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = \mathbb{R}$ .

Definiamo due funzioni:

- $s(x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (funzione costante zero, chiaramente limitata)
- $t(x) = x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (funzione identità, non limitata su tutto  $\mathbb{R}$ )

Notare che  $t \notin B(\mathbb{R})$  perché  $t$  non è limitata su  $\mathbb{R}$ . Ma  $s \in B(\mathbb{R})$ . Per ogni  $i \in \mathbb{N}$ ,  $s|_{U_i}$  è la funzione zero su  $U_i$  (che è limitata), mentre  $t|_{U_i}$  è la funzione identità su  $U_i$  (che è limitata perché  $U_i = (-i, i)$  è limitato, quindi  $|t(x)| = |x| < i$  per  $x \in U_i$ ).

Ma aspetta: confrontiamo  $s$  e  $t$  come sezioni di  $B$ . Non possiamo confrontare  $s$  e  $t$  come elementi di  $B(\mathbb{R})$  perché  $t \notin B(\mathbb{R})$ . La violazione della località è più sottile e richiede un esempio leggermente diverso. Consideriamo invece:

- $s(x) = \sin(x)$  (funzione seno, limitata)
- $t(x) = \sin(x)$  se  $x \neq 0$ , e  $t(0) = 2$

Entrambe sono in  $B(\mathbb{R})$  perché limitate. Su ogni  $U_i = (-i, i)$  per  $i > 0$ , abbiamo  $s|_{U_i} = t|_{U_i}$  se  $0 \notin U_i$ , ma  $0 \in U_i$  per ogni  $i$ , quindi questo esempio non funziona.

Un esempio migliore per violare località: prefascio delle sezioni discontinue. Definiamo  $D(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ha al massimo un punto di discontinuità in } U\}$ . Questo viola località: se prendiamo  $U = \mathbb{R}$  e ricopriamo con  $U_1 = (-\infty, 0)$  e  $U_2 = (0, \infty)$ , e definiamo  $f$  con discontinuità in  $0$ , allora  $f|_{U_1}$  e  $f|_{U_2}$  sono entrambe continue (quindi hanno zero discontinuità), ma  $f$  ha una discontinuità. Due funzioni diverse con la stessa discontinuità in  $0$  potrebbero avere restrizioni identiche a  $U_1$  e  $U_2$  ma essere diverse globalmente.

Effettivamente, il modo più chiaro di violare località è con il prefascio delle funzioni globalmente costanti:

- $\text{Const}(U) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ è costante su tutto } X \text{ e } U \neq \emptyset\}$  Per  $U$  non vuoto,  $\text{Const}(U)$  contiene solo funzioni globalmente costanti. Se  $U = U_1 \cup U_2$ , una funzione costante  $s$  su  $U$  ha restrizioni  $s|_{U_1}$  e  $s|_{U_2}$  che sono le stesse di qualsiasi altra funzione costante  $t$  con lo stesso valore costante. Ma  $s$  e  $t$  potrebbero essere diverse funzioni se hanno valori costanti diversi... no, se hanno lo stesso valore costante sono identiche.

Meglio: il prefascio delle funzioni con integrale fissato. Definiamo  $I_c(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \text{ continua} : \int_U f = c\}$  per qualche costante  $c$  fissata (assumendo  $U$  misurabile e integrabile). Due funzioni diverse con lo stesso integrale su  $U$  potrebbero avere le stesse restrizioni a un ricoprimento finito? No, per località di Lebesgue.

Il controesempio classico per violazione di località è il prefascio "skyscraper" o "grattacielo": Fissiamo un punto  $x_0 \in X$  e un insieme  $A$ . Definiamo:

- $\text{Sky}_{\{x_0, A\}}(U) = A$  se  $x_0 \in U$ , altrimenti  $\text{Sky}_{\{x_0, A\}}(U) = \{*\}$  (singleton)
- Restrizioni sono identità se manteniamo o perdiamo  $x_0$

Questo prefascio "concentra" tutto il dato  $A$  sul punto  $x_0$ . Viola località perché se ricopriamo un aperto  $U$  contenente  $x_0$  con aperti  $U_i$  dove solo alcuni contengono  $x_0$ , diverse sezioni globali in  $A$  potrebbero avere le stesse restrizioni ai pezzi.

### 5.3.2 Violazione dell'Incollamento: Prefascio delle Funzioni Globalmente Limitate

Torniamo al prefascio  $B$  delle funzioni limitate. Anche se aggiustiamo la definizione per soddisfare località,  $B$  viola l'incollamento. Consideriamo  $X = \mathbb{R}$  e il ricoprimento  $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$

con  $U_i = (-i, i)$ . Definiamo per ogni  $i$  una funzione  $s_i \in B(U_i)$  ponendo:  $s_i(x) = x$  per  $x \in U_i$

Chiaramente  $s_i$  è limitata su  $U_i$  (perché  $|s_i(x)| < i$ ). Per la compatibilità sulle sovrapposizioni:  $U_i \cap U_j = U_{\{\min(i,j)\}}$ , e  $s_i|_{U_i \cap U_j}(x) = x = s_j|_{U_i \cap U_j}(x)$ , quindi le sezioni sono compatibili.

Se  $B$  fosse un fascio, dovrebbe esistere  $s \in B(\mathbb{R})$  tale che  $s|_{U_i} = s_i$  per ogni  $i$ . Ma questo richiederebbe  $s(x) = x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$  (perché ogni  $x$  appartiene a qualche  $U_i$ ), quindi  $s$  sarebbe la funzione identità su  $\mathbb{R}$ , che non è limitata, quindi  $s \notin B(\mathbb{R})$ . Contraddizione! Le sezioni locali compatibili non possono essere incollate in una sezione globale. Il prefascio  $B$  viola l'incollamento.

Questo esempio mostra che condizioni "globali" (essere limitata su tutto lo spazio) possono impedire l'incollamento di sezioni locali che soddisfano la condizione localmente (ogni pezzo è limitato sul suo dominio).

#### 5.4 Fasci di Insiemi, Gruppi, Anelli e Moduli

Finora abbiamo discusso principalmente prefasci e fasci di insiemi, dove  $F(U)$  è un insieme e le mappe di restrizione sono funzioni tra insiemi. Questa è la nozione più generale. Tuttavia, in molte applicazioni matematiche e potenzialmente semantiche, è utile considerare fasci con struttura algebrica aggiuntiva.

Un fascio di gruppi abeliani è un fascio  $F$  dove:

- Per ogni aperto  $U$ ,  $F(U)$  è un gruppo abeliano
- Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}} : F(U) \rightarrow F(V)$  sono omomorfismi di gruppi
- Le condizioni di fascio valgono e sono compatibili con la struttura di gruppo

Analogamente possiamo definire fasci di anelli, dove  $F(U)$  è un anello e le restrizioni sono omomorfismi di anelli; fasci di moduli su un fascio di anelli; fasci di spazi vettoriali; e così via.

La struttura algebrica aggiuntiva permette di fare algebra con le sezioni: possiamo sommare sezioni, moltiplicarle, formare combinazioni lineari, e queste operazioni sono compatibili con le restrizioni. In semantica, potremmo usare fasci di gruppi per modellare composizioni di significati con struttura algebrica (per esempio, se i significati sono rappresentati in qualche algebra di Boole o reticolo, o se vogliamo fare calcoli algebrici con interpretazioni).

#### 5.5 Morfismi di Fasci e la Categoria $\mathbf{Sh}(X)$

Un morfismo di fasci (o più generalmente di prefasci)  $\varphi : F \rightarrow G$  su uno spazio topologico  $X$  è una trasformazione naturale tra i funtori  $F$  e  $G$  visti come funtori da  $\mathbf{Open}(X)$  a  $\mathbf{Set}$  (o alla categoria appropriata).

Concretamente, un morfismo  $\varphi : F \rightarrow G$  consiste di:

- Per ogni aperto  $U \in \tau$ , una funzione  $\varphi_U : F(U) \rightarrow G(U)$
- Queste funzioni sono compatibili con le restrizioni nel senso seguente: per ogni inclusione  $V \subseteq U$ , il diagramma commuta:

$$F(U) \xrightarrow{\varphi_U} G(U) \mid \mid \rho^*F_{\{U,V\}} \rho^*G_{\{U,V\}} \mid \mid v \in F(V) \xrightarrow{\varphi_V} G(V)$$

Ovvero:  $\rho^*G_{\{U,V\}} \circ \varphi_U = \varphi_V \circ \rho^*F_{\{U,V\}}$ . In parole: restringere prima (da  $U$  a  $V$ ) e poi applicare  $\varphi_V$  dà lo stesso risultato che applicare  $\varphi_U$  prima e poi restringere.

Questa compatibilità garantisce che i morfismi rispettino la struttura locale del fascio. Se trasformiamo una sezione globale  $s \in F(U)$  in  $\varphi_U(s) \in G(U)$ , la restrizione di questa sezione trasformata a  $V$  è esattamente la trasformazione della restrizione originale.

I morfismi di fasci permettono di:

- Confrontare e relazionare diversi fasci semantici (per esempio, il fascio delle interpretazioni letterali e il fascio delle interpretazioni metaforiche potrebbero essere connessi da un morfismo)
- Tradurre interpretazioni da un sistema semantico a un altro
- Studiare relazioni sistematiche tra livelli di analisi (morfismi dalla sintassi alla semantica, dalla semantica alla pragmatica)
- Definire nozioni di equivalenza e isomorfismo tra fasci

I fasci su uno spazio topologico  $X$ , con i morfismi appena definiti, formano una categoria denotata  $\text{Sh}(X)$ , la categoria dei fasci (di insiemi, o di gruppi abeliani, ecc.) su  $X$ . Questa categoria ha proprietà matematiche notevoli e utili:

**Completezza e Cocompletezza:**  $\text{Sh}(X)$  ammette tutti i limiti e colimiti (piccoli). Questo significa che possiamo costruire nuovi fasci da fasci esistenti usando operazioni universali come prodotti, coprodotti, equalizzatori, coequalizzatori, pullbacks, pushouts. In semantica, questo permette costruzioni compositive complesse di fasci semantici.

**Categoria Abelianiana:** Se lavoriamo con fasci di gruppi abeliani (o moduli),  $\text{Sh}(X)$  è una categoria abeliana. Questo significa che ha un oggetto zero, tutti i morfismi hanno kernel e cokernel, e ogni monomorfismo è il kernel del suo cokernel. Le categorie abeliane sono il setting naturale per fare algebra omologica.

**Abbastanza Iniettivi:**  $\text{Sh}(X)$  ha abbastanza oggetti iniettivi, ovvero per ogni fascio  $F$  esiste un monomorfismo  $F \rightarrow I$  dove  $I$  è iniettivo. Questo è cruciale per sviluppare la teoria coomologica, perché permette di costruire risoluzioni iniettive che sono lo strumento fondamentale per definire funtori derivati e gruppi di coomologia.

**Topos:** La categoria  $\text{Sh}(X)$  è un topos, una nozione categoriale che generalizza la categoria  $\text{Set}$ . I topoi hanno logica interna, permettono costruzioni di teoria degli insiemi "localmente", e sono oggetti di studio profondo nella logica categoriale e nella teoria dei topoi. Questa struttura potrebbe rivelarsi rilevante per sviluppare una "logica semantica interna" basata sui fasci.

## Capitolo 6: Costruzioni e Operazioni sui Fasci

### 6.1 Sheafification: Trasformare Prefasci in Fasci

Dato un prefascio  $F$  su  $X$  che non è un fascio (viola una o entrambe le condizioni di fascio), esiste una costruzione canonica universale che produce un fascio  $F^+$  associato, chiamato la sheafification o fascificazione di  $F$ . Questo fascio  $F^+$  è il "miglior fascio che approssima  $F$ ", nel senso che esiste un morfismo naturale  $F \rightarrow F^+$  che è universale rispetto a morfismi da  $F$  a fasci.

La costruzione di  $F^+$  procede in due passi:

1. Prima costruiamo  $F^+$ , che soddisfa l'incollamento ma potrebbe violare località
2. Poi costruiamo  $F^{++} = (F^+)^+$ , che soddisfa entrambe le condizioni

Più precisamente,  $F^+$  è definito come segue. Per ogni aperto  $U$ , consideriamo tutte le collezioni compatibili di germi:  $F^+(U)$  è l'insieme di funzioni  $s$  che assegnano a ogni  $x \in U$  un germe  $s(x) \in F_x$  tale che esiste un ricoprimento  $\{U_i\}$  di  $U$  e sezioni  $s_i \in F(U_i)$  con  $s(x) = [s_i]_x$  per ogni  $x \in U_i$ .

Questa costruzione è funtoriale: applicando sheafification a morfismi di prefasci otteniamo morfismi dei fasci associati. In semantica, la sheafification potrebbe rappresentare il processo di "regolarizzazione" di interpretazioni che inizialmente non soddisfano vincoli di coerenza globale, producendo interpretazioni coerenti che approssimano quelle originali nel miglior modo possibile.

## 6.2 Immagine Diretta e Immagine Inversa

Data una funzione continua  $f : X \rightarrow Y$  tra spazi topologici, possiamo trasportare fasci tra  $X$  e  $Y$  in entrambe le direzioni.

**Immagine Diretta (Pushforward):** Dato un fascio  $F$  su  $X$ , definiamo il fascio  $f_*F$  su  $Y$  ponendo:  $(f_*F)(V) = F(f^{-1}(V))$  per ogni aperto  $V$  in  $Y$

Intuitivamente, le sezioni di  $f_*F$  su un aperto  $V \subseteq Y$  sono le sezioni di  $F$  sulla controimmagine di  $V$  in  $X$ . Questo "spinge avanti" il fascio lungo  $f$ .

**Immagine Inversa (Pullback):** Dato un fascio  $G$  su  $Y$ , possiamo definire il fascio  $f^*G$  su  $X$  (la costruzione è più delicata, richiede sheafification). Intuitivamente,  $f^*G$  "tira indietro"  $G$  lungo  $f$ .

Nelle applicazioni semantiche, se abbiamo una mappa continua tra spazi contestuali (per esempio, una mappa che dimentica alcune dimensioni contestuali, o che traduce tra framework contestuali diversi), possiamo usare pushforward e pullback per trasferire fasci semantici e studiare come le interpretazioni si trasformano sotto cambi di contesto.

# Spazi Topologici di Contesti e Fasci Semantici

## Capitolo 7: Costruzione dello Spazio Contestuale Multidimensionale

### 7.1 La Complessità Multidimensionale del Contesto Comunicativo

Dopo aver stabilito con rigore matematico i fondamenti della teoria dei fasci, possiamo ora affrontare la questione cruciale e metodologicamente delicata di come costruire concretamente uno spazio topologico  $X$  che rappresenti fedelmente ed efficacemente l'universo dei contesti comunicativi rilevanti per l'analisi semantica. Questa costruzione è un passo fondamentale e strategicamente cruciale, perché la scelta della topologia, la decisione su quali aperti includere e quali relazioni di inclusione e sovrapposizione ammettere, determina in modo profondo quali fenomeni semantici possiamo catturare nella nostra modellazione, quali relazioni strutturali tra contesti possiamo esprimere formalmente, quali generalizzazioni possiamo formulare.

Un contesto comunicativo reale, concreto, effettivo, in cui un atto linguistico viene prodotto, trasmesso, ricevuto e interpretato, non è un'entità semplice, monolitica, unidimensionale, facilmente riducibile a un singolo parametro o a una caratteristica isolata. Al contrario, un contesto è un oggetto complesso, stratificato, multidimensionale, multifacetico, che incorpora, integra, combina molteplici tipi qualitativamente distinti di informazione contestuale, ciascuno dei quali contribuisce in modo specifico e sistematico alla determinazione dell'interpretazione appropriata di un'espressione linguistica.

Possiamo analiticamente identificare, distinguere, isolare almeno le seguenti dimensioni o componenti contestuali fondamentali, ciascuna delle quali merita un'analisi dettagliata:

#### 7.1.1 Contesto Linguistico (Cotesto)

Il contesto linguistico, spesso chiamato cotesto per distinguerlo dal contesto in senso più ampio, consiste nella sequenza di espressioni linguistiche che precedono e seguono cronologicamente e strutturalmente l'espressione target di cui vogliamo determinare l'interpretazione. Questa dimensione contestuale include:

**Catene Anaforiche:** Le relazioni di co-riferimento tra espressioni, dove pronomi, nomi definiti, ellissi si riferiscono ad antecedenti introdotti precedentemente nel discorso. Per esempio, in "Giovanni è entrato. Lui si è seduto", il pronome "lui" dipende anaforicamente dall'antecedente "Giovanni". Il cotesto determina quali referenti sono accessibili per la risoluzione anaforica.

**Struttura Informazionale:** L'organizzazione del contenuto in tema e rema, dato e nuovo, focus e sfondo. Il cotesto precedente stabilisce quale informazione è già data, condivisa, presupposta, e quindi cosa può essere presentato come nuovo. Per esempio, in "Riguardo a Maria, lei ha vinto la gara", "Maria" è il tema stabilito dal contesto sintattico dislocato.

**Coerenza e Coesione Testuale:** Le relazioni semantiche e pragmatiche che tengono insieme il testo come unità unificata. Connettivi discorsivi ("quindi", "però", "inoltre"), relazioni retoriche (elaborazione, contrasto, causa-effetto), pattern temporali (sequenza di eventi, flashback), tutti dipendono dal cotesto per la loro interpretazione. "Quindi" segnala che ciò che segue è conseguenza di quanto precede, ma dobbiamo guardare al cotesto per identificare cosa viene presentato come premessa.

**Presupposizioni Proiettate:** Certe costruzioni linguistiche (verbi fattivi come "sapere", costruzioni cleft come "è stato Giovanni che...", aspetti come "smettere di") introducono presupposizioni che vengono ereditate dal contesto e devono essere compatibili con il



cotesto. Se il cotesto include "Giovanni ha sempre fumato" e poi diciamo "Giovanni ha smesso di fumare", la presupposizione che Giovanni fumava precedentemente è supportata dal cotesto.

**Registro e Stile Linguistico:** Il cotesto stabilisce aspettative sul registro appropriato (formale vs. informale, tecnico vs. divulgativo) che influenzano l'interpretazione di termini ambigui. Se il cotesto è un testo legale formale, "parte" si interpreta nel senso legale di "parte in causa" piuttosto che "porzione".

Il contesto linguistico può essere modellato formalmente come una struttura sintattica annessa, un albero di derivazione, una rappresentazione discorsiva strutturata (DRS nella Discourse Representation Theory), o semplicemente come una sequenza ordinata di segmenti testuali. La topologia naturale su questo spazio potrebbe riflettere relazioni di inclusione (un cotesto più ampio include sottoparti), similarità strutturale (cotesti con pattern sintattici simili sono topologicamente vicini), o distanza informazionale.

### 7.1.2 Contesto Situazionale e Fisico

Il contesto situazionale comprende le circostanze fisiche, spaziali e temporali immediate dell'atto comunicativo, inclusi:

**Luogo Fisico di Enunciazione:** Dove avviene la comunicazione ha effetti profondi sull'interpretazione. Un'aula scolastica, una sala operatoria ospedaliera, una sala conferenze aziendale, un tribunale, un salotto domestico sono luoghi che attivano frame semantici diversi, rendono salienti vocabolari specializzati diversi, stabiliscono aspettative pragmatiche diverse. "Prepara il banco" ha interpretazioni radicalmente diverse in una scuola (disponi il mobile scolastico), in una banca (prepara lo sportello per i clienti), o in un laboratorio di falegnameria (sistema il banco da lavoro).

**Tempo di Enunciazione:** Il momento temporale assoluto (data e ora) e relativo (prima/durante/dopo eventi rilevanti) influenza l'interpretazione di deittici temporali ("ora", "ieri", "domani"), tempi verbali (il presente può riferirsi al momento dell'enunciazione o avere valore storico/narrativo), e inferenze pragmatiche (se è notte, "Buongiorno!" è ironico o inappropriato).

**Oggetti e Configurazione Spaziale:** Gli oggetti fisicamente presenti nell'ambiente percettivo condiviso dai partecipanti costituiscono potenziali referenti per espressioni deittiche ostensive. "Questo" può riferirsi all'oggetto attualmente indicato gestualmente, "il libro" può riferirsi all'unico libro visibile nella situazione. La configurazione spaziale (chi sta dove, cosa è vicino a cosa) influenza l'interpretazione di espressioni spaziali e relazioni di accessibilità (A può passare B a C se sono vicini).

**Eventi Percepibili:** Cosa sta succedendo percettibilmente nell'ambiente contestuale fornisce ancora interpretative. Se vediamo qualcuno cadere, e qualcuno esclama "Aiuto!", interpretiamo immediatamente l'utreranza in relazione all'evento percepito. Eventi visivi, sonori, olfattivi possono tutti costituire contesto rilevante.

Formalmente, il contesto situazionale può essere modellato come un prodotto di spazi:  $X_{sit} = X_{loc} \times X_{temp} \times X_{obj} \times X_{eventi}$ , dove  $X_{loc}$  è uno spazio di luoghi (potrebbe essere

discreto se abbiamo un numero finito di location rilevanti, o continuo come  $\mathbb{R}^3$  se vogliamo rappresentare posizioni fisiche esatte),  $X_{temp}$  è un asse temporale ( $\mathbb{R}$  con topologia euclidea, o discretizzato in intervalli),  $X_{obj}$  è uno spazio di configurazioni di oggetti (potrebbe essere un insieme potenza di oggetti, o uno spazio di stati con topologia riflettente accessibilità e similarità),  $X_{eventi}$  è uno spazio di eventi possibili. La topologia euclidea o modificazioni di essa (con salienze percettive che modificano le distanze) sono scelte naturali per le componenti spaziali e temporali.

### 7.1.3 Contesto Sociale e Interpersonale

Le relazioni sociali tra i partecipanti all'atto comunicativo, i loro ruoli istituzionali, le gerarchie di potere, le convenzioni sociali e le aspettative normative costituiscono una dimensione contestuale fondamentale:

**Ruoli Sociali e Istituzionali:** I partecipanti occupano ruoli (insegnante-studente, medico-paziente, giudice-imputato, capo-subordinato, venditore-cliente, amici, estranei) che attivano script comunicativi, norme di cortesia, aspettative su chi può dire cosa a chi e come. Un ordine dato da un superiore a un subordinato ("Finisci il report entro domani") ha forza pragmatica diversa dalla stessa forma linguistica tra pari o in direzione inversa.

**Relazioni di Potere e Status:** Asimmetrie di potere sociale, autorità istituzionale, prestigio influenzano interpretazioni e implicature. Un suggerimento del capo ("Forse potresti rivedere questa sezione") può funzionare pragmaticamente come un ordine, mentre lo stesso suggerimento da un collega è genuinamente opzionale.

**Grado di Familiarità e Intimità:** Partecipanti intimi (familiari, amici stretti) possono usare abbreviazioni, riferimenti impliciti, linguaggio informale che sarebbe inappropriato o incomprensibile con estranei. "Ci vediamo al solito posto" funziona solo se c'è un "solito posto" condiviso nella storia comune.

**Norme di Cortesia (Politeness):** Le facce positive (desiderio di essere approvati) e negative (desiderio di autonomia) dei partecipanti sono gestite attraverso strategie di cortesia che dipendono dal contesto sociale. Richieste dirette ("Chiudi la finestra!") vs. indirette ("Sarebbe possibile chiudere la finestra?") vs. super-indirette ("Fa freddo qui dentro") sono scelte contestualmente appropriate a seconda della distanza sociale e della gerarchia.

**Aspettative Normative:** Regole conversazionali, convenzioni di genere testuale (come si scrive un'email formale, come si conduce un'intervista di lavoro, come si testimonia in tribunale) sono contestualmente determinate dal setting sociale.

Formalmente,  $X_{soc}$  può essere modellato come uno spazio (discreto o continuo) di configurazioni sociali, dove ciascun punto specifica ruoli, relazioni, parametri di potere e familiarità. La topologia può riflettere "vicinanza" tra configurazioni sociali simili (contesti con solo piccole variazioni nei ruoli sono vicini), o connessioni strutturali (certi ruoli implicano altri).

### 7.1.4 Contesto Culturale ed Enciclopedico

La conoscenza di sfondo condivisa, le credenze culturali, le convenzioni sociali più ampie, le conoscenze fattuali sul mondo costituiscono il common ground culturale:

**Conoscenza Enciclopedica:** Fatti generali sul mondo fisico, storico, geografico che i partecipanti presumibilmente condividono. Se dico "Napoleone fu sconfitto a Waterloo", presuppongo che l'ascoltatore sappia chi era Napoleone e cosa rappresenta Waterloo storicamente. L'interpretazione di riferimenti storici, allusioni letterarie, metafore basate su conoscenza scientifica dipende da questo sfondo condiviso.

**Stereotipi e Prototipi:** Concettualizzazioni tipiche di categorie ("gli uccelli tipicamente volano", "le automobili hanno quattro ruote") che servono come default inferenziali. Se dico "Ho visto un uccello" l'ascoltatore assume per default che poteva volare salvo indicazioni contrarie, anche se esistono uccelli che non volano.

**Frame Culturali e Script:** Schemi cognitivi strutturati che organizzano conoscenza su situazioni tipiche. Il "frame del ristorante" include ruoli (cliente, cameriere, chef), sequenze di eventi (ordinare, mangiare, pagare), oggetti tipici (menu, tavolo, conto). Questi frame guidano interpretazioni: "Il cameriere ha portato il conto" evoca automaticamente tutto il frame ristorante.

**Valori e Norme Culturali:** Sistemi di valori (cosa è considerato importante, desiderabile, vergognoso), norme morali e comportamentali che variano tra culture. In culture individualistiche vs. collettiviste, lo stesso enunciato può avere cariche valoriali diverse.

X\_cult può essere modellato come uno spazio di "stati epistemici culturali", dove ogni punto rappresenta un insieme coerente di credenze, conoscenze, valori condivisi. La topologia può riflettere prossimità tra sistemi di credenze (culture con background simili sono vicine), o relazioni di inclusione (una cultura specifica è un raffinamento di una cultura generale).

### 7.1.5 Contesto Conversazionale e Dialogico

Lo stato dinamico della conversazione in corso, la storia del dialogo, gli scopi comunicativi condivisi e individuali costituiscono un'ulteriore dimensione:

**Storia Conversazionale:** La sequenza di turni precedenti, cosa è stato detto da chi, quali impegni discorsivi sono stati stabiliti (commitment). Se A dice "Ti richiamerò domani" e poi B dice "Non vedo l'ora", l'interpretazione di B dipende dal commitment di A nel turno precedente.

**Question Under Discussion (QUD):** In ogni punto della conversazione, c'è una questione (esplicita o implicita) che organizza il discorso. Le risposte appropriate, la rilevanza delle contribuzioni, l'interpretazione di frammenti ellittici dipendono dalla QUD. Se la domanda è "Chi ha vinto?", la risposta "Maria" è ellittica ma completamente comprensibile dato il QUD.

**Scopi Comunicativi:** Gli obiettivi pragmatici dei partecipanti (informare, persuadere, intrattenere, comandare, esprimere emozioni) influenzano l'interpretazione di atti linguistici e implicature. "Le elezioni sono domani" può essere un reminder amichevole o un'esortazione velata a votare, a seconda degli scopi inferiti.

**Common Ground Dinamico:** L'insieme delle proposizioni mutualmente credute, accettate come condivise dai partecipanti, che si evolve durante la conversazione. Ogni asserzione accettata entra nel common ground e diventa disponibile per riferimento anaforico, presupposizioni, inferenze successive.

$X_{conv}$  può essere modellato come uno spazio di stati conversazionali, dove ogni punto rappresenta una configurazione dello scambio comunicativo (turni passati, QUD corrente, scopi, common ground). La topologia riflette continuità discorsiva (stati conversazionali raggiungibili con poche mosse conversazionali sono vicini) e coerenza pragmatica.

### 7.1.6 Contesto Epistemico e Doxastico

La distribuzione della conoscenza e delle credenze tra i partecipanti, ciò che ciascuno sa, ciò che ciascuno crede che l'altro sappia (credenze di secondo ordine), e così via attraverso livelli arbitrari di credenza mutua:

**Conoscenza Individuale:** Cosa ciascun partecipante sa fattualmente. Se solo A sa un fatto F, A può scegliere di informare B ("F è vero") o di nascondere (omissione).

**Credenze e Opinioni:** Proposizioni che i partecipanti considerano probabili o desiderabili, ma non necessariamente conoscenza certa. Divergenze di credenze possono portare a disaccordi espliciti o negoziazioni di significato.

**Credenze Mutue e Common Knowledge:** A sa che B sa che A sa... indefinitamente. La conoscenza comune (common knowledge) è necessaria per certe inferenze pragmatiche. Per esempio, l'ironia funziona solo se è common knowledge che il parlante sa che l'ascoltatore riconoscerà l'inversione del significato letterale.

**Modelli Mentali dell'Altro:** Rappresentazioni che ciascun partecipante costruisce della mente dell'altro (Theory of Mind). A modella cosa B sa, crede, desidera, intende, e adatta la comunicazione di conseguenza. Malintesi sorgono da modelli mentali inaccurati.

$X_{epist}$  può essere modellato come uno spazio di strutture di credenza mutua, alberi o grafi di accessibilità epistemica dove nodi rappresentano stati epistemici e collegamenti rappresentano relazioni di accessibilità ("A considera possibile che B sappia..."). La topologia è indotta dalla struttura di accessibilità.

## 7.2 Costruzione dello Spazio Prodotto Multidimensionale

Avendo identificato e analizzato le componenti contestuali fondamentali, proponiamo di costruire lo spazio base  $X$  come prodotto cartesiano di molteplici spazi componenti, ciascuno dotato della propria topologia naturale appropriata alla dimensione che rappresenta:

$$X = X_{ling} \times X_{sit} \times X_{soc} \times X_{cult} \times X_{conv} \times X_{epist}$$

Formalmente, se  $(X_i, \tau_i)$  per  $i \in \{ling, sit, soc, cult, conv, epist\}$  sono spazi topologici, il prodotto cartesiano  $X = \prod_i X_i$  è dotato della topologia prodotto  $\tau_{prod}$ , dove un aperto base ha la forma:

$$U = U_{\text{ling}} \times U_{\text{sit}} \times U_{\text{soc}} \times U_{\text{cult}} \times U_{\text{conv}} \times U_{\text{epist}}$$

dove  $U_i \in \tau_i$  per ogni  $i$ , ma con la restrizione che  $U_i = X_i$  (l'intero spazio componente) per tutti tranne finitamente molti indici. Questo significa che un aperto base "cilindrico" fissa solo un numero finito di coordinate contestuali, lasciando le altre completamente libere.

Ogni punto  $c \in X$  rappresenta un contesto comunicativo completamente specificato, ovvero una tupla:

$$c = (c_{\text{ling}}, c_{\text{sit}}, c_{\text{soc}}, c_{\text{cult}}, c_{\text{conv}}, c_{\text{epist}})$$

dove ciascuna componente  $c_i$  specifica il valore di quella dimensione contestuale nel contesto particolare  $c$ .

Le proiezioni canoniche  $\pi_i : X \rightarrow X_i$  definite da  $\pi_i(c) = c_i$  sono continue per costruzione della topologia prodotto. Questo significa che possiamo sempre "dimenticare" alcune dimensioni contestuali proiettando su un sottospazio prodotto, e questa operazione preserva la struttura topologica.

### 7.3 Aperti Contestuali: Regioni e Loro Interpretazione Linguistica

Gli aperti  $U \subseteq X$  dello spazio topologico  $X$  rappresentano "regioni contestuali", "classi di contesti", "insiemi di situazioni comunicative" che condividono certe proprietà rilevanti. La potenza espressiva della modellazione topologica emerge dalla possibilità di formare aperti complessi combinando aperti base attraverso unioni e intersezioni finite.

#### 7.3.1 Aperti Cilindrici Elementari

Gli aperti base della topologia prodotto sono "aperti cilindrici" che vincolano solo alcune coordinate lasciando le altre libere. Consideriamo alcuni esempi paradigmatici:

$$U_{\text{banca}} = X_{\text{ling}} \times U_{\text{banca}}^{\text{sit}} \times X_{\text{soc}} \times X_{\text{cult}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$$

Questo aperto vincola solo la componente situazionale, richiedendo  $c_{\text{sit}} \in U_{\text{banca}}^{\text{sit}}$  dove  $U_{\text{banca}}^{\text{sit}} \subseteq X_{\text{sit}}$  è il sottoinsieme di situazioni che avvengono in ambienti bancari o finanziari (banche commerciali, sportelli, uffici finanziari). Tutte le altre dimensioni sono non vincolate. Questo aperto rappresenta "tutti i contesti dove ci si trova fisicamente in una banca, indipendentemente da cosa si sta dicendo, da chi è presente, da quali sono gli scopi conversazionali, ecc."

$$U_{\text{scuola}} = X_{\text{ling}} \times U_{\text{scuola}}^{\text{sit}} \times X_{\text{soc}} \times X_{\text{cult}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$$

Analogamente, questo vincola solo la situazione a contesti educativi (scuole, università, aule, contesti di insegnamento).

$$U_{\text{formale}} = X_{\text{ling}} \times X_{\text{sit}} \times U_{\text{formale}}^{\text{soc}} \times X_{\text{cult}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$$

Questo vincola solo la dimensione sociale, richiedendo configurazioni con alto grado di formalità (relazioni gerarchiche marcate, distanza sociale elevata, norme di cortesia rigorose), indipendentemente dalla situazione fisica o dal contenuto linguistico.

$$U_{\text{passato}} = X_{\text{ling}} \times U_{\text{passato}}^{\text{sit}} \times X_{\text{soc}} \times X_{\text{cult}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$$

Questo vincola la componente temporale della situazione, selezionando solo contesti dove il tempo di enunciazione è nel passato (relativo a qualche punto di riferimento), permettendo interpretazioni di tempi verbali al passato.

### 7.3.2 Intersezioni di Aperti: Contesti Multi-Vincolati

La potenza espressiva emerge quando consideriamo intersezioni di aperti cilindrici, che vincolano simultaneamente molteplici dimensioni:

$$U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}}$$

Questo aperto rappresenta contesti che sono simultaneamente bancari (nella dimensione situazionale) e formali (nella dimensione sociale). Questi sono contesti come transazioni ufficiali in banca, consultazioni con funzionari bancari senior, apertura di conti d'investimento, che richiedono sia il setting fisico bancario sia un registro comunicativo formale. In questi contesti, le interpretazioni di espressioni devono essere appropriate tanto al dominio finanziario quanto al registro elevato.

Per esempio, "banco" in  $U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}}$  si interpreta specificamente come "sportello bancario in contesto istituzionale formale", escludendo interpretazioni colloquiali o metaforiche (come "banco di prova" in senso traslato).

$$U_{\text{scuola}} \cap U_{\text{passato}}$$

Questo rappresenta contesti educativi dove si discutono o si ricordano eventi passati. Potrebbe essere una lezione di storia, un ricordo condiviso di un'esperienza scolastica precedente, un esame orale su materiale storico. In questi contesti, i tempi verbali al passato ricevono interpretazioni appropriate (passato storico vs. passato narrativo vs. passato di esperienza personale).

$$U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}} \cap U_{\text{questionamento}}$$

Dove  $U_{\text{questionamento}}$  vincola la dimensione conversazionale a situazioni dove la QUD (Question Under Discussion) riguarda investigazioni, richieste di informazione, chiarimenti. Questo potrebbe rappresentare un'intervista formale in banca per richiesta di prestito, dove il funzionario interroga il cliente sui suoi redditi, patrimoni, scopi del finanziamento.

### 7.3.3 Unioni di Aperti: Disgiunzione Contestuale

Le unioni di aperti rappresentano contesti che soddisfano almeno una di molteplici condizioni:

$$U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}}$$

Questo aperto include tutti i contesti che sono o bancari o scolastici (o entrambi se l'intersezione è non vuota, cosa possibile per esempio in una lezione di economia bancaria in università). Rappresenta la disgiunzione: "contesti bancari oppure contesti scolastici".

Questo aperto è rilevante quando consideriamo parole polisemiche come "banco" che hanno interpretazioni distinte in ciascuna di queste regioni ma nessuna interpretazione singola che vale uniformemente su tutta l'unione.

### 7.3.4 Complementi di Aperti: Contesti Esclusivi

Se  $U$  è aperto, il complemento  $X \setminus U$  (che tipicamente non è aperto se  $U$  non è clopen) rappresenta "tutti i contesti che non sono in  $U$ ", ovvero contesti che escludono le caratteristiche definite da  $U$ .

$X \setminus U_{\text{banca}}$  sono tutti i contesti non bancari.  $X \setminus U_{\text{formale}}$  sono contesti informali. Questi complementi sono spesso chiusi piuttosto che aperti nella topologia standard.

## 7.4 Topologie Alternative e Scelte Metodologiche

La costruzione dello spazio  $X$  e della sua topologia non è unica. Diverse scelte metodologiche portano a spazi topologici con proprietà diverse, più o meno adatti a catturare fenomeni semantici specifici.

### 7.4.1 Granularità della Topologia

**Topologia Fine (molti aperti):** Una topologia con molti aperti piccoli permette discriminazioni fini tra contesti vicini. La topologia discreta è l'estremo dove ogni insieme è aperto, permettendo massima distinzione ma perdendo struttura di continuità. Topologie fini sono utili quando vogliamo modellare dipendenze contestuali molto sensibili a piccole variazioni.

**Topologia Grossa (pochi aperti):** Una topologia con pochi aperti grandi identifica molti contesti come topologicamente indistinguibili. La topologia indiscreta è l'estremo opposto. Topologie grosse sono utili quando vogliamo astrarre da dettagli contestuali non rilevanti, modellando solo distinzioni macroscopiche.

La scelta della granularità è un trade-off: topologie fini catturano più sfumature ma rendono i calcoli più complessi; topologie grosse semplificano ma potrebbero perdere distinzioni semanticamente rilevanti.

### 7.4.2 Topologie Metriche vs. Non Metriche

Se dottiamo  $X$  di una metrica  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  che misura "distanza contestuale", possiamo indurre una topologia metrica dove gli aperti sono unioni di palle aperte  $B(c, \epsilon) = \{c' \in X : d(c, c') < \epsilon\}$ .

Una metrica contestuale potrebbe sommare distanze nelle varie dimensioni:

$$d(c, c') = w_{\text{ling}} \cdot d_{\text{ling}}(c_{\text{ling}}, c'_{\text{ling}}) + w_{\text{sit}} \cdot d_{\text{sit}}(c_{\text{sit}}, c'_{\text{sit}}) + w_{\text{soc}} \cdot d_{\text{soc}}(c_{\text{soc}}, c'_{\text{soc}}) + \dots$$

dove  $w_i$  sono pesi che riflettono l'importanza relativa delle dimensioni, e  $d_i$  sono metriche sulle componenti.

Le topologie metriche hanno proprietà utili (Hausdorff, primo-numerabili, metrizzabili) ma richiedono che la "distanza contestuale" sia quantificabile numericamente, cosa non sempre naturale o empiricamente giustificabile.

Topologie non metriche (per esempio, indotte da relazioni di accessibilità parziali) sono più flessibili e possono catturare relazioni qualitative tra contesti che non si riducono a distanze numeriche.

# Sheaves e Semantica Contestuale: Continuazione Ultra-Dettagliata

## Prosecuzione da Sheaves2.pdf - Parte I

---

### 7.4.2 Topologie Metriche vs. Non Metriche (continuazione ed espansione)

Topologie non metriche, ovvero topologie che non possono essere indotte da alcuna funzione di distanza metrica, sono più flessibili, più generali, più espressive nella loro capacità di catturare relazioni qualitative strutturali tra contesti, relazioni che non si riducono necessariamente, che non possono essere completamente codificate, fedelmente rappresentate attraverso distanze numeriche quantitative. Queste topologie non metriche permettono di modellare situazioni semantiche complesse dove la "vicinanza" o la "lontananza" tra contesti ha natura intrinsecamente qualitativa, ordinale piuttosto che cardinale, dove possiamo dire che un contesto è "più vicino" a un secondo che a un terzo senza poter quantificare precisamente "quanto" più vicino.

Un esempio paradigmatico di topologia non metrica rilevante per la semantica è la topologia alessandrina indotta da relazioni di accessibilità parziale, che discuteremo approfonditamente nel capitolo dedicato al collegamento con la semantica di Kripke. In queste topologie, la relazione fondamentale non è una funzione distanza  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  ma una relazione binaria  $R \subseteq X \times X$  di accessibilità, preferenza, implicazione, o subordinazione contestuale. Due contesti  $c_1$  e  $c_2$  sono topologicamente "vicini" non perché la loro distanza metrica sia piccola, ma perché stanno in una certa relazione strutturale qualitativa: per esempio,  $c_2$  è accessibile da  $c_1$  ( $c_1 R c_2$ ), o  $c_2$  è una specializzazione di  $c_1$ , o  $c_2$  condivide con  $c_1$  certi attributi categoriali essenziali.

Un altro esempio importante di struttura non metrica è quella indotta da gerarchie concettuali o tassonomie ontologiche. Consideriamo lo spazio dei contesti culturali e enciclopedici  $X_{\text{cult}}$  dove ciascun punto rappresenta un sistema di credenze e conoscenze. Potremmo voler dotare questo spazio di una topologia che rifletta relazioni di inclusione concettuale: un sistema di credenze  $S_1$  include tutti i concetti di un sistema  $S_2$  più alcuni concetti aggiuntivi. Questa relazione di inclusione è un ordine parziale, non una metrica. La topologia indotta è quella alessandrina dove gli aperti sono gli ideali principali up-closed: se un aperto contiene



un sistema di credenze  $S$ , contiene anche tutti i sistemi che estendono  $S$  con credenze aggiuntive. Questa topologia cattura elegantemente l'idea che specializzare, arricchire, raffinare un contesto epistemico è un'operazione continua topologicamente, mentre "dimenticare" o "astrarre" può essere vista come proiezione su un sottospazio.

La scelta tra topologie metriche e non metriche non è puramente tecnica ma riflette impegni teorici profondi sulla natura della similarità contestuale. Una topologia metrica presuppone che la similarità tra contesti sia quantificabile lungo dimensioni continue, che esista una "geometria" dello spazio contestuale dove possiamo misurare angoli e distanze. Questo è plausibile per certe dimensioni contestuali: la dimensione temporale si presta naturalmente a metrizzazione (la distanza tra due istanti temporali può essere misurata in secondi, minuti, ore), così come la dimensione spaziale fisica (la distanza tra due luoghi può essere misurata in metri o chilometri). Tuttavia, per dimensioni come il registro sociale, il genere discorsivo, l'atteggiamento epistemico, la modalità deontica, la quantificazione della distanza è molto più problematica e potenzialmente artefatta. Quanto "dista" un contesto formale da uno informale? Quanto "dista" un contesto assertivo da uno interrogativo? Questi interrogativi ammettono risposte numeriche precise, o la relazione è intrinsecamente qualitativa?

La teoria dei fasci ha il grande vantaggio di non richiedere che lo spazio base sia metrico. Tutte le definizioni e tutti i teoremi che abbiamo presentato valgono per spazi topologici arbitrari, metrici o non metrici, Hausdorff o non Hausdorff, connessi o disconnessi, compatti o non compatti. Questa generalità è preziosa perché ci permette di iniziare con una topologia grossolana, semplice, forse anche discreta, e poi raffinarla progressivamente man mano che la nostra comprensione empirica dei fenomeni semantici migliora, senza dover riscrivere l'intero framework teorico. Possiamo partire con una topologia indotta da una relazione di accessibilità contestuale semplice, binaria, e poi passare a una topologia più fine indotta da una metrica sofisticata se e quando i dati linguistici lo richiedono o lo giustificano.

### 7.4.3 Topologie Indotte da Relazioni di Similarità Graduata

Una via intermedia interessante tra topologie discrete e topologie metriche continue è offerta dalle topologie indotte da relazioni di similarità graduata o fuzzy. Invece di una funzione distanza che assegna a ogni coppia di contesti un numero reale preciso  $d(c_1, c_2)$ , possiamo lavorare con una funzione di similarità  $\text{sim}: X \times X \rightarrow [0, 1]$  che assegna a ogni coppia un grado di similarità compreso tra zero (completamente dissimili) e uno (completamente identici). Questa funzione di similarità non deve necessariamente soddisfare la disuguaglianza triangolare che caratterizza le metriche, permettendo maggiore flessibilità nella modellazione di intuizioni di somiglianza contestuale che violano la transitività metrica.

Data una funzione di similarità  $\text{sim}: X \times X \rightarrow [0, 1]$ , possiamo indurre una topologia in vari modi. Un approccio consiste nel definire, per ogni punto  $c \in X$  e ogni soglia  $\varepsilon \in (0, 1]$ , l'insieme di similarità  $B(c, \varepsilon) = \{c' \in X : \text{sim}(c, c') \geq \varepsilon\}$ , ovvero tutti i contesti che hanno similarità con  $c$  almeno pari a  $\varepsilon$ . La collezione di tutti questi insiemi di similarità, per ogni punto e ogni soglia, genera una base per una topologia su  $X$ . Gli aperti di questa topologia sono unioni arbitrarie di insiemi di similarità.

Questa topologia indotta da similarità ha proprietà interessanti. Primo, cattura l'idea intuitiva che contesti simili siano topologicamente vicini: se  $c_1$  e  $c_2$  hanno alta similarità  $\text{sim}(c_1, c_2)$  vicina a uno, allora appartengono a molti aperti comuni, ovvero sono vicini nel senso topologico. Secondo, la topologia è sensibile alla scelta della soglia: abbassando la soglia  $\epsilon$  otteniamo aperti più grandi, topologie più grosse che identificano più contesti; alzando la soglia otteniamo aperti più piccoli, topologie più fini che distinguono maggiormente. Terzo, questa topologia può catturare asimmetrie di similarità se la funzione  $\text{sim}$  non è simmetrica: potremmo avere  $\text{sim}(c_1, c_2) \neq \text{sim}(c_2, c_1)$ , riflettendo l'idea che  $c_1$  "ricorda"  $c_2$  più di quanto  $c_2$  "ricordi"  $c_1$ , fenomeno ben documentato in psicologia cognitiva dove la similarità percepita tra categorie prototipiche e esemplari periferici è asimmetrica.

Un'applicazione concreta di topologie da similarità graduata emerge nello studio della polisemia regolare e delle reti semantiche. Consideriamo lo spazio dei contesti dove la parola "correre" può essere usata. Possiamo definire una funzione di similarità basata su sovrapposizione di tratti semantici:  $\text{sim}(c_1, c_2)$  è il rapporto tra il numero di tratti semantici condivisi e il numero totale di tratti presenti in almeno uno dei due contesti. Per esempio, un contesto sportivo atletico  $c_{\text{atletica}}$  e un contesto sportivo automobilistico  $c_{\text{auto}}$  condividono tratti come [+competizione], [+velocità], [+regole], ma differiscono su tratti come [+umano] vs [+meccanico]. La loro similarità potrebbe essere  $\text{sim}(c_{\text{atletica}}, c_{\text{auto}}) = 0,6$ . Questa funzione di similarità induce una topologia dove contesti con molti tratti condivisi sono vicini, permettendoci di modellare estensioni semantiche regolari come continuità topologiche.

#### 7.4.4 Topologie Duali: Aperti di Certezza e Aperti di Possibilità

Nella semantica modale e epistemica, è spesso utile lavorare con due topologie duali su uno stesso spazio base, catturando rispettivamente nozioni di certezza (necessità, conoscenza) e possibilità (contingenza, credenza). Questa dualità emerge naturalmente dalla struttura logica degli operatori modali e può essere elegantemente formalizzata attraverso coppie di topologie in relazione di dualità.

Sia  $X$  uno spazio di mondi possibili o contesti epistemici. Definiamo due topologie distinte su  $X$ :

- La topologia della certezza  $\tau_{\text{cert}}$ , dove un aperto  $U$  rappresenta "regioni dove una proposizione è certamente vera", ovvero contesti dove abbiamo conoscenza o evidenza conclusiva della verità di qualche fatto.
- La topologia della possibilità  $\tau_{\text{poss}}$ , dove un aperto  $V$  rappresenta "regioni dove una proposizione è possibilmente vera", ovvero contesti dove la proposizione è compatibile con ciò che è noto.

Queste due topologie non sono indipendenti ma stanno in una relazione di dualità precisa. In logica modale classica, questa dualità è catturata dalla relazione tra gli operatori  $\Box$  (necessariamente) e  $\Diamond$  (possibilmente):  $\Diamond\phi \equiv \neg\Box\neg\phi$ . Topologicamente, questa dualità si manifesta attraverso la relazione tra aperti e chiusi: un insieme è aperto nella topologia della certezza se e solo se il suo complemento è chiuso nella topologia della possibilità, e viceversa.

Formalmente, diciamo che due topologie  $\tau_1$  e  $\tau_2$  su uno stesso spazio  $X$  sono duali se per ogni insieme  $A \subseteq X$  vale:  $A \in \tau_1$  se e solo se  $X \setminus A$  è chiuso in  $\tau_2$ . Questa relazione di dualità implica che gli operatori di chiusura e interno nelle due topologie sono correlati: l'interno di un insieme nella prima topologia è il complemento della chiusura del complemento nella seconda topologia.

Nel contesto semantico, la topologia duale permette di modellare simultaneamente aspetti epistemici positivi (cosa sappiamo) e negativi (cosa non possiamo escludere). Consideriamo un fascio epistemico  $F_{\text{conosc}}$  sulla topologia della certezza  $\tau_{\text{cert}}$ , dove  $F_{\text{conosc}}(U)$  contiene le proposizioni che sono conosciute in tutti i contesti in  $U$ . Simultaneamente, possiamo considerare un fascio duale  $F_{\text{cred}}$  sulla topologia della possibilità  $\tau_{\text{poss}}$ , dove  $F_{\text{cred}}(V)$  contiene le proposizioni che sono credute possibili, compatibili con l'evidenza disponibile, in qualche contesto in  $V$ .

La relazione tra questi due fasci duali cattura la distinzione epistemologica fondamentale tra conoscenza certa e credenza possibile. Una proposizione può essere nel fascio della possibilità su un aperto ampio (è creduta possibile in molti contesti diversi) senza essere nel fascio della certezza su alcun aperto (non c'è nessun contesto dove sia effettivamente conosciuta con certezza). Questa asimmetria modella la differenza tra " $\phi$  potrebbe essere vero" e " $\phi$  è certamente vero", cruciale in semantica epistemica.

Un'applicazione interessante emerge nell'analisi di costruzioni evidenziali, dove i parlanti segnalano la fonte e l'affidabilità dell'informazione che stanno trasmettendo. In lingue con sistemi evidenziali grammaticalizzati ricchi (come il turco, il tibetano, il quechua), i morfemi evidenziali codificano distinzioni come testimonianza diretta vs indiretta, inferenza vs reportativo, conoscenza personale vs sentito dire. Queste distinzioni possono essere modellate come sezioni di fasci su topologie duali: l'evidenza diretta corrisponde a sezioni sul fascio della certezza su aperti piccoli (contesti esperienziali molto specifici), mentre l'evidenza indiretta corrisponde a sezioni sul fascio della possibilità su aperti più grandi (famiglie di contesti compatibili con l'informazione riferita).

## 7.5 Operazioni Topologiche Avanzate sugli Spazi Contestuali

Oltre alla costruzione base dello spazio prodotto  $X = X_{\text{ling}} \times X_{\text{sit}} \times X_{\text{soc}} \times \dots$  esistono operazioni topologiche più sofisticate che permettono di costruire spazi contestuali con proprietà specifiche desiderate per modellare fenomeni semantici particolari.

### 7.5.1 Quozienti Topologici e Identificazioni Contestuali

In molte situazioni semantiche, vogliamo identificare, collassare, trattare come equivalenti contesti che differiscono solo per aspetti irrilevanti rispetto al fenomeno linguistico che stiamo studiando. Per esempio, se stiamo analizzando la semantica di termini temporali deittici come "ieri" e "domani", la componente sociale del contesto (se la conversazione è formale o informale, quali sono i ruoli sociali dei partecipanti) potrebbe essere completamente irrilevante. In questo caso, vogliamo "proiettare via" la dimensione sociale, ottenendo uno spazio contestuale ridotto dove due contesti che differiscono solo per la componente sociale sono identificati, trattati come un unico punto.

Questa operazione di identificazione è formalizzata attraverso la costruzione del quoziente topologico. Sia  $X$  uno spazio topologico e sia  $\sim$  una relazione di equivalenza su  $X$ , ovvero una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva che partiziona  $X$  in classi di equivalenza disgiunte. Lo spazio quoziente  $X/\sim$  è l'insieme di queste classi di equivalenza, dove ciascun punto rappresenta un'intera classe di punti originali identificati tra loro. La topologia quoziente su  $X/\sim$  è definita come segue: un sottoinsieme  $U \subseteq X/\sim$  è aperto se e solo se la sua preimmagine tramite la proiezione canonica  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  (che mappa ogni punto alla sua classe di equivalenza) è aperta in  $X$ .

In termini semantici concreti, supponiamo di voler costruire uno spazio contestuale dove identifichiamo tutti i contesti che hanno la stessa componente temporale indipendentemente dalle altre dimensioni. Definiamo la relazione di equivalenza  $\sim_{\text{temp}}$  su  $X = X_{\text{ling}} \times X_{\text{sit}} \times X_{\text{soc}} \times X_{\text{cult}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$  ponendo:  $c_1 \sim_{\text{temp}} c_2$  se e solo se  $\pi_{\text{temp}}(c_1) = \pi_{\text{temp}}(c_2)$ , ovvero se le proiezioni sulla componente temporale (che è parte di  $X_{\text{sit}}$ ) coincidono. Lo spazio quoziente  $X/\sim_{\text{temp}}$  identifica tutti i contesti con lo stesso timestamp, collassando tutte le altre variazioni. Un aperto nello spazio quoziente corrisponde a una "fascia temporale" di contesti, indipendentemente da cosa succede nelle altre dimensioni.

Il quoziente topologico ha proprietà universali importanti. La proiezione canonica  $\pi: X \rightarrow X/\sim$  è continua per costruzione della topologia quoziente. Inoltre, gode della seguente proprietà universale: per ogni spazio topologico  $Y$  e ogni funzione continua  $f: X \rightarrow Y$  che è costante sulle classi di equivalenza (ovvero  $f(x_1) = f(x_2)$  ogni volta che  $x_1 \sim x_2$ ), esiste un'unica funzione continua  $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$  tale che  $f = \bar{f} \circ \pi$ . Questa proprietà universale garantisce che lo spazio quoziente sia il "miglior" modo di identificare punti secondo la relazione di equivalenza preservando la continuità.

In semantica, il quoziente topologico modella operazioni di astrazione contestuale. Quando diciamo che il significato di un termine deittico come "domani" dipende "solo dal tempo di enunciazione", stiamo implicitamente asserendo che la funzione semantica che mappa contesti a denotazioni passa al quoziente rispetto a tutte le dimensioni contestuali eccetto quella temporale. Il fascio semantico per "domani" può quindi essere pensato come vivente sullo spazio quoziente temporale piuttosto che sullo spazio contestuale completo, semplificando enormemente la sua struttura.

## 7.5.2 Somme Disgiunte e Unioni Topologiche

Un'altra operazione fondamentale è la somma disgiunta (o unione disgiunta) di spazi topologici. Data una famiglia di spazi topologici  $\{(X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ , la *somma disgiunta*  $\sqcup_{i \in I} X_i$  è l'unione disgiunta insiemistica degli  $X_i$  (dove rendiamo gli insiemi formalmente disgiunti anche se si sovrappongono, etichettando ogni elemento con il suo indice di provenienza), dotata della topologia disgiunta dove un sottoinsieme  $U \subseteq \sqcup_{i \in I} X_i$  è aperto se e solo se la sua intersezione  $U \cap X_i$  con ciascuna componente è aperta in  $X_i$ .

Intuitivamente, la somma disgiunta "giustappone" gli spazi uno accanto all'altro senza creare connessioni topologiche tra loro: ciascuna componente  $X_i$  è contemporaneamente aperta e chiusa (clopen) nella somma disgiunta, riflettendo la completa disconnessione topologica tra le componenti. Non ci sono "passaggi continui" da un punto in  $X_i$  a un punto in  $X_j$  per  $i \neq j$ .

In semantica, la somma disgiunta modella situazioni dove il contesto può trovarsi in "regimi" o "modalità" radicalmente distinte, disconnesse, incommensurabili tra loro. Per esempio, potremmo modellare contesti letterali e contesti metaforici come due spazi separati, con la somma disgiunta  $X_{\text{lett}} \sqcup X_{\text{met}}$  rappresentando lo spazio totale dei contesti interpretativi. Un contesto è o interamente letterale o interamente metaforico, non ci sono "sfumature intermedie" o "passaggi graduali" tra i due regimi (questa è ovviamente una semplificazione drastica della realtà semantica, dove letterale e metaforico formano piuttosto un continuum, ma può essere utile come prima approssimazione per certi fenomeni).

Analogamente, potremmo usare somme disgiunte per modellare diverse "modalità discorsive" radicalmente distinte: contesti narrativi, contesti argomentativi, contesti poetici, contesti scientifici potrebbero essere trattati come componenti disgiunte se vogliamo enfatizzare le loro discontinuità rispetto alle loro continuità. Un fascio semantico sulla somma disgiunta si comporta indipendentemente su ciascuna componente, riflettendo l'idea che le regole interpretative nei diversi regimi discorsivi possano essere completamente diverse.

La somma disgiunta gode anch'essa di una proprietà universale duale a quella del prodotto: per ogni famiglia di spazi  $\{X_i\}_{i \in I}$  e ogni spazio  $Y$ , le funzioni continue dalla somma disgiunta  $\sqcup_{i \in I} X_i$  a  $Y$  corrispondono biunivocamente alle famiglie di funzioni continue  $\{f_i: X_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$ . In altre parole, specificare una funzione sulla somma disgiunta equivale a specificare separatamente una funzione su ciascuna componente, senza vincoli di compatibilità tra le componenti.

### 7.5.3 Aggiunzioni e Topologie Iniziali/Finali

Quando costruiamo spazi contestuali attraverso operazioni complesse che coinvolgono molteplici funzioni tra spazi, è spesso utile invocare le costruzioni universali di topologie iniziali e finali, che generalizzano sia i prodotti che le somme disgiunte.

Data una famiglia di funzioni  $\{f_i: X \rightarrow Y_i\}_{i \in I}$  da un insieme  $X$  verso spazi topologici  $(Y_i, \tau_i)$ , la topologia iniziale su  $X$  (rispetto a questa famiglia) è la topologia meno fine che rende continue tutte le  $f_i$ . Concretamente, una subbase per questa topologia consiste di tutte le preimmagini  $f_i^{-1}(U_i)$  dove  $U_i$  è aperto in  $Y_i$ . Il prodotto cartesiano è un caso speciale di topologia iniziale, dove le funzioni sono le proiezioni canoniche.

Dualmente, data una famiglia di funzioni  $\{g_i: X_i \rightarrow Y\}_{i \in I}$  da spazi topologici verso un insieme  $Y$ , la topologia finale su  $Y$  (rispetto a questa famiglia) è la topologia più fine che rende continue tutte le  $g_i$ . Un sottoinsieme  $U \subseteq Y$  è aperto nella topologia finale se e solo se  $g_i^{-1}(U)$  è aperto in  $X_i$  per ogni  $i \in I$ . La somma disgiunta e il quoziente sono casi speciali di topologie finali.

In semantica contestuale, queste costruzioni universali permettono di definire spazi complessi attraverso relazioni funzionali con spazi più semplici. Supponiamo di voler costruire uno spazio di "contesti effettivi"  $Y$  che sono quelli effettivamente realizzabili, raggiungibili attraverso processi comunicativi concreti, come sottospazio dello spazio teorico completo  $X$  di tutti i contesti matematicamente possibili. Potremmo avere varie funzioni  $g_i: D_i \rightarrow Y$  dove ciascun  $D_i$  rappresenta un "dominio discorsivo" o "genere testuale" specifico (conversazione faccia a faccia, email formali, articoli giornalistici, poesia lirica...) e

$g_i$  mappa i punti di  $D_i$  (stati discorsivi in quel genere) ai corrispondenti contesti effettivi in  $Y$ . La topologia finale su  $Y$  indotta da questa famiglia garantisce che la nozione di "apertura" in  $Y$  sia compatibile con le nozioni di apertura in tutti i domini discorsivi  $D_i$ .

## 7.6 Connessioni, Archi e Percorsi Contestuali

Molti fenomeni semantici coinvolgono non solo la struttura statica dello spazio contestuale, ma anche nozioni dinamiche di "transizione" o "percorso" da un contesto a un altro. Per esempio, l'evoluzione di una conversazione nel tempo può essere vista come un percorso continuo nello spazio contestuale, dove il contesto si muove attraverso regioni diverse man mano che nuova informazione viene introdotta, scopi conversazionali cambiano, aspetti sociali si evolvono.

### 7.6.1 Spazi Connessi e Componenti Connesse

Uno spazio topologico  $X$  si dice connesso se non può essere scritto come unione disgiunta di due aperti non vuoti, ovvero se gli unici sottoinsiemi che sono contemporaneamente aperti e chiusi (clopen) sono il vuoto e l'intero spazio  $X$ . Intuitivamente, uno spazio connesso è "tutto d'un pezzo", non si spezza in parti separate senza punti di contatto.

La connessione topologica dello spazio contestuale ha significato semantico profondo: se  $X$  è connesso, allora esiste sempre, almeno in linea di principio, un "passaggio continuo" da qualunque contesto a qualunque altro contesto, una sequenza di variazioni infinitesimali che trasformano gradualmente il primo nel secondo senza salti discontinui. Al contrario, se  $X$  è disconnesso, esistono coppie di contesti tra cui non è possibile alcuna transizione continua: appartengono a "mondi interpretativi" separati, incommensurabili.

La domanda se lo spazio contestuale "reale" di una lingua naturale sia connesso o disconnesso è empirica e profonda. Una posizione teorica ottimistica sostiene che tutti i contesti comunicativi umani sono in linea di principio raggiungibili gli uni dagli altri attraverso transizioni continue: da una conversazione scientifica formale possiamo passare gradualmente a una conversazione informale familiare attraverso una serie di piccoli aggiustamenti di registro, tono, lessico, atteggiamenti sociali. Questa visione suggerirebbe che  $X$  è connesso, riflettendo la flessibilità e adattabilità fondamentale della comunicazione umana.

Una posizione più cauta nota che certi contesti potrebbero essere genuinamente separati da barriere invalicabili. Per esempio, il contesto di un rituale religioso fortemente codificato potrebbe essere topologicamente disconnesso dal contesto di una conversazione quotidiana profana, nel senso che non esiste alcuna sequenza continua di micro-variazioni che trasformi l'uno nell'altro preservando le proprietà essenziali: il rituale cessa di essere rituale se lo secolarizziamo gradualmente. Questa visione suggerirebbe che  $X$  potrebbe essere una somma disgiunta di componenti connesse distinte.

Ogni spazio topologico si decompone in modo unico in componenti connesse massimali:  $X = \sqcup_{i \in I} C_i$  dove ciascun  $C_i$  è connesso e massimale con questa proprietà. Questa decomposizione identifica le "regioni massimali" dello spazio contestuale all'interno delle quali sono possibili transizioni continue. In semantica, le componenti connesse potrebbero corrispondere a grandi "famiglie" o "tipi" contestuali: tutti i contesti formali scritti potrebbero

formare una componente connessa, tutti i contesti orali spontanei un'altra, tutti i contesti performativi ritualizzati un'altra ancora.

### 7.6.2 Archi e Connessione per Archi

Una nozione più forte di connessione è la connessione per archi. Uno spazio  $X$  si dice connesso per archi se per ogni coppia di punti  $x, y \in X$  esiste un arco che li collega, ovvero una funzione continua  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(1) = y$ . Intuitivamente, un arco è un "cammino continuo" parametrizzato dall'intervallo unitario che parte da  $x$  e arriva in  $y$ .

Ogni spazio connesso per archi è connesso (perché l'immagine di  $[0, 1]$  tramite una funzione continua è connessa), ma non viceversa: esistono spazi patologici connessi ma non connessi per archi. Tuttavia, per molti spazi "ragionevoli" (per esempio, spazi metrici, varietà differenziabili), connessione e connessione per archi coincidono.

Nello spazio contestuale, un arco  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  rappresenta una "traiettoria contestuale", un'evoluzione continua del contesto parametrizzata da un tempo astratto  $t \in [0, 1]$ . Il valore  $\gamma(t)$  è il contesto al "momento"  $t$  lungo questa traiettoria. Questa modellazione è particolarmente naturale per fenomeni discorsivi: l'evoluzione di una conversazione nel tempo reale corrisponde a un arco nello spazio contestuale, dove il parametro  $t$  potrebbe essere il tempo fisico misurato in secondi o minuti.

Consideriamo un esempio concreto. Supponiamo che due persone inizino una conversazione in un contesto formale professionale (diciamo, due colleghi che si incontrano per discutere un progetto di lavoro). Man mano che la conversazione procede, il tono si rilassa gradualmente, diventa più informale, più personale. Iniziano a scherzare, a parlare di argomenti non lavorativi, a usare forme linguistiche colloquiali. Alla fine, il contesto è diventato informale amichevole. Questa evoluzione è rappresentabile come un arco  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  dove  $\gamma(0)$  è il contesto formale iniziale e  $\gamma(1)$  è il contesto informale finale. La continuità di  $\gamma$  riflette il fatto che non ci sono stati salti discontinui: a ogni istante intermedio  $t \in (0, 1)$ , il contesto  $\gamma(t)$  è "vicino" ai contesti immediatamente precedenti e successivi, la transizione è graduale piuttosto che abrupta.

La struttura degli archi nello spazio contestuale è rilevante per la teoria del cambio contestuale dinamico (dynamic context change), centrale nella semantica dinamica. In questa prospettiva teorica, il significato di un'espressione non è (solo) una condizione di verità statica, ma è (anche) una funzione di cambio contestuale, un'operazione che trasforma il contesto di input in un contesto di output. Per esempio, l'asserzione di una proposizione  $p$  trasforma il contesto aggiungendo  $p$  al common ground, restringendo lo spazio delle possibilità considerate. Formalmente, questa trasformazione può essere vista come una funzione  $c \mapsto c[p]$  dove  $c$  è il contesto prima dell'asserzione e  $c[p]$  è il contesto dopo.

Se questa trasformazione è continua (nel senso topologico), allora possiamo comporre asserzioni successive ottenendo archi nello spazio contestuale: una sequenza di asserzioni  $p_1, p_2, \dots, p_n$  corrisponde a un arco che parte dal contesto iniziale  $c_0$ , passa per  $c_1 = c_0[p_1]$ , poi  $c_2 = c_1[p_2]$ , e così via fino a  $c_n$ . La continuità garantisce che l'evoluzione contestuale sia "liscia", senza discontinuità patologiche.

### 7.6.3 Gruppoidi Fondamentali e Invarianti Topologici dello Spazio Contestuale

Per spazi connessi per archi sufficientemente regolari, possiamo definire invarianti topologici algebrici che catturano la "forma" globale dello spazio in termini di possibili archi e loro equivalenze. Il più fondamentale di questi invarianti è il gruppo fondamentale (o più generalmente, il gruppoide fondamentale).

Fissato un punto base  $c_0 \in X$  (un "contesto di riferimento"), il gruppo fondamentale  $\pi_1(X, c_0)$  è l'insieme delle classi di equivalenza di archi chiusi (loops) basati in  $c_0$ , ovvero archi  $\gamma: [0, 1] \rightarrow X$  con  $\gamma(0) = \gamma(1) = c_0$ , dove due loops sono equivalenti se possono essere deformati continuamente l'uno nell'altro (tecnicamente, se sono omotopi). La struttura di gruppo viene dalla composizione di loops: percorri il primo loop, poi il secondo.

In termini semantici, un loop nello spazio contestuale rappresenta un'"escursione contestuale" che parte da un contesto  $c_0$ , esplora varie regioni dello spazio attraverso un percorso continuo, e alla fine ritorna al contesto di partenza. Due loops omotopi rappresentano due escursioni che, pur magari passando per contesti intermedi diversi, sono "essenzialmente equivalenti" nel senso che possono essere trasformati continuamente l'uno nell'altro senza attraversare ostruzioni topologiche.

Il gruppo fondamentale misura in qualche senso la "complessità topologica" dello spazio:  $\pi_1(X, c_0)$  è il gruppo banale  $\{e\}$  se e solo se  $X$  è semplicemente connesso, ovvero se ogni loop può essere contratto continuamente a un punto. Spazi topologicamente più complessi, con "buchi" o "manici", hanno gruppi fondamentali non banali.

In semantica, la non banalità del gruppo fondamentale potrebbe riflettere l'esistenza di "cicli interpretativi", situazioni dove una sequenza di transizioni contestuali continue ci riporta topologicamente allo stesso contesto ma con una trasformazione globale non banale dell'interpretazione. Un esempio speculativo: consideriamo contesti dove interpretiamo la parola "luce" in modo letterale fisico (radiazione elettromagnetica), poi attraverso una serie di estensioni metaforiche gradualmente arriviamo a interpretazioni spirituali/religiose ("la luce della fede"), e da lì, forse attraverso ulteriori transizioni (contesti artistici, simbolici), potremmo tornare circolarmente a contesti dove "luce" ha di nuovo accezioni fisiche ma con connotazioni arricchite dal percorso metaforico. Se questo "ciclo semantico" induce una trasformazione non banale (per esempio, l'interpretazione finale non è identica a quella iniziale anche se topologicamente siamo tornati allo stesso tipo di contesto), questo potrebbe manifestarsi come elemento non banale del gruppo fondamentale.

Naturalmente, queste applicazioni del gruppo fondamentale alla semantica sono altamente speculative e richiederebbero sviluppi teorici sostanziali per diventare precise ed empiricamente testabili. Tuttavia, suggeriscono che invarianti topologici algebrici potrebbero in linea di principio catturare aspetti profondi della struttura dello spazio semantico che sarebbero invisibili a un'analisi puramente locale.

---

## Capitolo 8: Fasci Semantici - Definizioni Sistematiche e Proprietà Fondamentali



Dopo aver costruito con cura lo spazio topologico  $X$  dei contesti comunicativi, dotato della sua ricca struttura topologica multidimensionale, possiamo finalmente procedere alla definizione rigorosa e sistematica di fasci semantici su questo spazio. I fasci semantici costituiscono il cuore matematico della nostra proposta teorica: sono le strutture formali che modellano come i significati dipendono dal contesto in modo localmente coerente ma globalmente variabile.

## 8.1 Fasci Semantici per Espressioni Lessicali: Definizioni Costruttive

Iniziamo con la classe più fondamentale di fasci semantici: quelli associati a singole unità lessicali, parole o morfemi, gli atomi del lessico mentale. Per ogni espressione lessicale  $\ell$  (per esempio, "banco", "correre", "alto", "qui"), costruiremo un fascio semantico  $F_\ell$  su  $X$  che codifica sistematicamente come il significato o l'interpretazione di  $\ell$  varia attraverso lo spazio contestuale.

### 8.1.1 Fascio Semantico per "banco": Analisi Dettagliata

Consideriamo come esempio paradigmatico, che abbiamo già incontrato informalmente, la parola italiana "banco". Questa parola è polisemica in modo ricco e sistematico, con interpretazioni radicalmente diverse in contesti diversi. Procederemo a costruire il fascio  $F_{\text{banco}}$  passo dopo passo, specificando le sue sezioni su aperti rilevanti e le mappe di restrizione tra di esse.

#### Passo 1: Identificare gli aperti contestuali rilevanti

Prima di assegnare interpretazioni, dobbiamo identificare quali regioni dello spazio contestuale  $X$  sono salienti per la polisemia di "banco". Dall'analisi empirica degli usi effettivi della parola, possiamo identificare almeno i seguenti aperti principali:

- $U_{\text{banca}}$ : l'aperto di tutti i contesti dove la componente situazionale indica un ambiente bancario, finanziario, di sportelli per transazioni monetarie. Formalmente,  $U_{\text{banca}} = X_{\text{ling}} \times U_{\text{banca}}^{\text{sit}} \times X_{\text{soc}} \times X_{\text{cult}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$ , dove  $U_{\text{banca}}^{\text{sit}} \subseteq X_{\text{sit}}$  è il sottoinsieme di situazioni bancarie.
- $U_{\text{scuola}}$ : l'aperto di tutti i contesti con ambiente educativo, scolastico, dove sono presenti aule, studenti, attività didattiche. Similmente,  $U_{\text{scuola}} = X_{\text{ling}} \times U_{\text{scuola}}^{\text{sit}} \times X_{\text{soc}} \times X_{\text{cult}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$ .
- $U_{\text{mercato}}$ : l'aperto di contesti commerciali all'aperto o al coperto, mercati, fiere, dove venditori offrono merci su banchi espositivi.  $U_{\text{mercato}} = X_{\text{ling}} \times U_{\text{mercato}}^{\text{sit}} \times X_{\text{soc}} \times X_{\text{cult}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$ .
- $U_{\text{tribunale}}$ : contesti giudiziari, processuali, aule di tribunale con l'apposita configurazione spaziale e sociale.  $U_{\text{tribunale}} = X_{\text{ling}} \times U_{\text{tribunale}}^{\text{sit}} \times X_{\text{soc}} \times X_{\text{cult}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$ .
- $U_{\text{banco\_pesci}}$ : contesti marini, ittici, dove si discute di aggregazioni di animali acquatici. Questo è meno chiaramente caratterizzabile come una semplice proiezione sulla componente situazionale, perché coinvolge fortemente anche la

componente culturale-enciclopedica (conoscenza del mondo marino) e linguistica (tipicamente in testi descrittivi, narrativi su pesca o biologia marina). Potremmo definirlo come  $U_{\text{pesce}} = U_{\text{ling}}^{\text{marittimo}} \times U_{\text{sit}}^{\text{acquatico}} \times X_{\text{soc}} \times U_{\text{cult}}^{\text{marino}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$ .

- $U_{\text{banco\_nebbia}}$ : contesti meteorologici, geografici, dove si discutono fenomeni atmosferici. Similmente, questo richiede una combinazione di componenti:  $U_{\text{nebbia}} = U_{\text{ling}}^{\text{meteorologico}} \times U_{\text{sit}}^{\text{geografico}} \times X_{\text{soc}} \times U_{\text{cult}}^{\text{scientifico}} \times X_{\text{conv}} \times X_{\text{epist}}$ .

Questi aperti non sono disgiunti: possono sovrapporsi in modi complessi e interessanti, come vedremo.

## **Passo 2: Specificare le sezioni su ciascun aperto**

Per ciascuno degli aperti identificati, specifichiamo l'insieme delle possibili interpretazioni semantiche, ovvero definiamo  $F_{\text{banco}}(U)$  per ciascun  $U$ .

$F_{\text{banco}}(U_{\text{banca}}) = \{\sigma_{\text{banca}}\}$  dove  $\sigma_{\text{banca}}$  è l'interpretazione: "struttura fisica, tipicamente orizzontale, dotata di uno o più sportelli, dove impiegati bancari effettuano transazioni finanziarie con i clienti, inclusi operazioni di deposito, prelievo, cambio valuta, informazioni su conti, prestiti e servizi bancari". Questa interpretazione è altamente specifica al dominio bancario-finanziario e include aspetti funzionali (scopo transazionale), strutturali (configurazione fisica dello sportello), sociali (ruolo impiegato-cliente), e istituzionali (contesto della banca come istituzione).

$F_{\text{banco}}(U_{\text{scuola}}) = \{\sigma_{\text{scuola}}\}$  dove  $\sigma_{\text{scuola}}$  è l'interpretazione: "mobile scolastico costituito da una superficie piana, tipicamente di legno, plastica o metallo, posizionata a un'altezza ergonomica per studenti seduti, dove gli studenti appoggiano quaderni, libri, materiale didattico durante le lezioni, spesso integrato con seduta nella configurazione di banco-sedia combinato". Questa interpretazione enfatizza aspetti fisico-funzionali (mobile per appoggio), pedagogici (uso durante lezioni), e tipologici (caratteristiche costruttive tipiche del mobilio scolastico).

$F_{\text{banco}}(U_{\text{mercato}}) = \{\sigma_{\text{mercato}}\}$  dove  $\sigma_{\text{mercato}}$  è l'interpretazione: "tavolo espositivo, struttura fisica più o meno stabile, dove commercianti, venditori ambulanti o fissi dispongono merci (frutta, verdura, abbigliamento, oggetti vari) per mostrarle ai potenziali acquirenti, facilitare l'ispezione visiva e tattile, e concludere transazioni commerciali". Enfasi su funzione espositiva e commerciale, configurazione variabile (da semplice tavolo a struttura più elaborata con tettoia).

$F_{\text{banco}}(U_{\text{tribunale}}) = \{\sigma_{\text{tribunale}}\}$  dove  $\sigma_{\text{tribunale}}$  è l'interpretazione: "postazione designata all'interno dell'aula giudiziaria, tipicamente una struttura tipo tavolo o recinto basso, dove siedono gli imputati durante il processo penale, fisicamente separata ma visibile dal banco del giudice, dell'accusa, della difesa e del pubblico, con significato simbolico e procedurale nell'architettura spaziale della giustizia". Enfasi su dimensione istituzionale-simbolica oltre che fisica.

$F_{\text{banco}}(U_{\text{pesci}}) = \{\sigma_{\text{banco\_pesci}}\}$  dove  $\sigma_{\text{banco\_pesci}}$  è l'interpretazione: "aggregazione, gruppo numeroso di pesci della stessa specie che nuotano insieme in formazione coordinata, tipicamente per motivi di protezione dai predatori, efficienza nella ricerca di cibo, o riproduzione, costituente un'unità comportamentale ed ecologica nell'ambiente marino". Qui "banco" è usato in senso collettivo e il significato è completamente diverso, non riferendosi più a una struttura fisica fissa ma a un'entità mobile e organizzata biologicamente.

$F_{\text{banco}}(U_{\text{nebbia}}) = \{\sigma_{\text{banco\_nebbia}}\}$  dove  $\sigma_{\text{banco\_nebbia}}$  è l'interpretazione: "massa densa, consistente di nebbia, foschia o nuvola bassa che occupa una regione geografica delimitata, spesso persistente e visibile come entità unitaria, con possibili effetti sulla navigazione, visibilità, e condizioni meteorologiche locali". Uso metaforico esteso da "massa fisica estesa" comune anche al banco di pesci, con enfaticizzazione della natura compatta e delimitata del fenomeno.

Notare che abbiamo definito  $F_{\text{banco}}(U)$  come insiemi singleton  $\{\sigma_U\}$  contenenti un'unica interpretazione per ciascun aperto. Questa è una semplificazione: in realtà, anche all'interno di un singolo tipo di contesto (per esempio, contesti bancari), potrebbero esistere variazioni interpretative sottili, sfumature, ambiguità residue. Una modellazione più raffinata permetterebbe  $F_{\text{banco}}(U)$  di contenere molteplici sezioni distinte, catturando polisemia residua o sottodeterminazione anche a contesto fisso. Per ora manteniamo la semplificazione di un'unica interpretazione per aperto, che è sufficiente per illustrare i concetti fondamentali.

### Passo 3: Definire le mappe di restrizione

Ora dobbiamo specificare come le interpretazioni si comportano quando restringiamo da un aperto più grande a uno più piccolo. Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{banco}}(U) \rightarrow F_{\text{banco}}(V)$  per  $V \subseteq U$  devono essere definite in modo consistente con gli assiomi dei prefasci.

Consideriamo alcuni casi:

Restrizione banale: Se  $V \subseteq U$  e entrambi sono contenuti in uno degli aperti principali (per esempio,  $U, V \subseteq U_{\text{banca}}$ ), allora la restrizione è l'identità:  $\rho_{\{U,V\}}(\sigma_{\text{banca}}) = \sigma_{\text{banca}}$ . L'interpretazione bancaria rimane invariata quando ci restringiamo a sottocontesti all'interno del regime bancario.

Restrizione a intersezioni non vuote: Consideriamo l'intersezione  $U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}}$ , dove  $U_{\text{formale}}$  è l'aperto (che attraversa la componente sociale) di contesti con alto registro formale. Cosa contiene  $F_{\text{banco}}(U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}})$ ? Se  $U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}} \subseteq U_{\text{banca}}$ , allora per coerenza delle restrizioni dovremmo avere una mappa  $\rho_{\{U_{\text{banca}}, U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}}\}}: \{\sigma_{\text{banca}}\} \rightarrow F_{\text{banco}}(U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}})$ . L'interpretazione si specializza: definiamo  $F_{\text{banco}}(U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}}) = \{\sigma_{\text{banca\_formale}}\}$  dove  $\sigma_{\text{banca\_formale}}$  è una versione raffinata di  $\sigma_{\text{banca}}$  che enfatizza aspetti istituzionali, esclude usi colloquiali o metaforici, specifica terminologia tecnica appropriata ("sportello bancario", "postazione di servizio clienti" piuttosto che semplicemente "banco").

Restrizione a unioni: Cosa succede su  $U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}}$ ? Per l'assioma del fascio, una sezione  $s \in F_{\text{banco}}(U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}})$  deve restringersi coerentemente sia a  $U_{\text{banca}}$  che a  $U_{\text{scuola}}$ . Ma  $\sigma_{\text{banca}}$  e  $\sigma_{\text{scuola}}$  sono interpretazioni incompatibili! Non esiste un'unica interpretazione che sia simultaneamente bancaria e scolastica. Questo significa che  $F_{\text{banco}}(U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}})$  non può contenere una sezione globale unificante. Invece, possiamo avere sezioni "a pezzi": una funzione  $s: U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}} \rightarrow \{\text{possibili interpretazioni}\}$  tale che  $s(c) = \sigma_{\text{banca}}$  se  $c \in U_{\text{banca}} \setminus U_{\text{scuola}}$ , e  $s(c) = \sigma_{\text{scuola}}$  se  $c \in U_{\text{scuola}} \setminus U_{\text{banca}}$ . Ma cosa succede se  $U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}} \neq \emptyset$ ? Se l'intersezione è vuota (i contesti bancari e scolastici sono disgiunti), allora le sezioni a pezzi sono ben definite. Se l'intersezione è non vuota (esiste un contesto che è simultaneamente bancario e scolastico - per esempio, una lezione di economia bancaria in un'università), allora sulla sovrapposizione dobbiamo scegliere un'unica interpretazione. In questo caso, fattori contestuali aggiuntivi (quale aspetto è più saliente: il fatto che siamo in un ambiente educativo, o il fatto che stiamo discutendo di banche?) determineranno quale interpretazione prevale sulla sovrapposizione.

Questo esempio rivela una caratteristica cruciale:  $F_{\text{banco}}$  non è un fascio, è solo un prefascio! Le interpretazioni localmente compatibili ( $\sigma_{\text{banca}}$  su  $U_{\text{banca}}$ ,  $\sigma_{\text{scuola}}$  su  $U_{\text{scuola}}$ ) non possono essere incollate in un'interpretazione globale su  $U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}}$  quando l'intersezione è non vuota ma le interpretazioni divergono. Questo fallimento dell'incollamento corrisponde precisamente al fenomeno linguistico dell'ambiguità polisemica: "banco" non ha un singolo significato globale ma significati multipli localmente definiti che entrano in conflitto quando i contesti si sovrappongono.

#### Passo 4: Verificare gli assiomi del prefascio

Dobbiamo verificare che le mappe di restrizione che abbiamo definito soddisfino gli assiomi di identità e composizionalità.

Identità:  $\rho_{\{U,U\}}$  deve essere l'identità su  $F_{\text{banco}}(U)$ . Questo è chiaramente soddisfatto per costruzione: restringere un'interpretazione all'aperto dove è già definita non la modifica.

Composizionalità: Se  $W \subseteq V \subseteq U$ , allora  $\rho_{\{V,W\}} \circ \rho_{\{U,V\}} = \rho_{\{U,W\}}$ . Verifichiamo con un esempio:  $U = U_{\text{banca}}$ ,  $V = U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}}$ ,  $W = U_{\text{banca}} \cap U_{\text{formale}} \cap U_{\text{istituzionale}}$  dove  $U_{\text{istituzionale}}$  vincola ulteriormente a contesti con forte enfasi istituzionale. Abbiamo:

- $\rho_{\{U,V\}}(\sigma_{\text{banca}}) = \sigma_{\text{banca\_formale}}$
- $\rho_{\{V,W\}}(\sigma_{\text{banca\_formale}}) = \sigma_{\text{banca\_formale\_istituzionale}}$  (ulteriore specializzazione)
- $\rho_{\{U,W\}}(\sigma_{\text{banca}}) = \sigma_{\text{banca\_formale\_istituzionale}}$  (specializzazione diretta)

La composizionalità richiede  $\rho_{\{V,W\}}(\rho_{\{U,V\}}(\sigma_{\text{banca}})) = \rho_{\{U,W\}}(\sigma_{\text{banca}})$ , ovvero  $\sigma_{\text{banca\_formale\_istituzionale}} = \sigma_{\text{banca\_formale\_istituzionale}}$ , che è soddisfatto. La specializzazione progressiva attraverso livelli intermedi produce lo stesso risultato della specializzazione diretta.

#### Passo 5: Analizzare l'ostruzione all'incollamento

Formalizziamo ora perché  $F_{\text{banco}}$  non soddisfa la condizione di fascio. Consideriamo il ricoprimento  $\{U_{\text{banca}}, U_{\text{scuola}}\}$  dell'unione  $U = U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}}$ . Abbiamo due sezioni locali:

- $s_1 = \sigma_{\text{banca}} \in F_{\text{banco}}(U_{\text{banca}})$
- $s_2 = \sigma_{\text{scuola}} \in F_{\text{banco}}(U_{\text{scuola}})$

Per l'assioma di incollamento, se queste sezioni sono compatibili sulle sovrapposizioni (ovvero  $s_1|_{\{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}\}} = s_2|_{\{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}\}}$ ), dovrebbe esistere un'unica sezione globale  $s \in F_{\text{banco}}(U)$  che le estende entrambe.

Caso 1: Se  $U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}} = \emptyset$  (intersezione vuota, i contesti sono disgiunti), allora la condizione di compatibilità è vacuamente vera (non c'è sovrapposizione su cui confrontare), e l'incollamento funziona: possiamo definire  $s: U \rightarrow \text{interpretazioni}$  ponendo  $s(c) = \sigma_{\text{banca}}$  se  $c \in U_{\text{banca}}$  e  $s(c) = \sigma_{\text{scuola}}$  se  $c \in U_{\text{scuola}}$ . Questa è una sezione ben definita che estende entrambe le sezioni locali.

Caso 2: Se  $U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}} \neq \emptyset$  (esistono contesti simultaneamente bancari e scolastici), allora dobbiamo verificare se  $s_1|_{\{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}\}} = s_2|_{\{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}\}}$ . Ma  $\sigma_{\text{banca}} \neq \sigma_{\text{scuola}}$ , quindi le restrizioni divergono sulla sovrapposizione. La condizione di compatibilità non è soddisfatta, e l'incollamento fallisce. Non esiste alcuna sezione globale che estenda coerentemente entrambe le interpretazioni locali.

Questo fallimento dell'incollamento non è un difetto della modellazione ma una caratteristica essenziale che cattura matematicamente il fenomeno linguistico dell'ambiguità polisemica irrisolvibile. Quando ci troviamo in un contesto che appartiene simultaneamente a  $U_{\text{banca}}$  e  $U_{\text{scuola}}$  (per esempio, una discussione sull'arredamento scolastico che menziona anche mobili di tipo bancario per confronto), la parola "banco" è genuinamente ambigua: potrebbe riferirsi all'uno o all'altro tipo di banco, e solo fattori contestuali ulteriori, esterni alla struttura base del fascio, possono risolvere l'ambiguità.

### 8.1.2 Sheafification di $F_{\text{banco}}$ : Costruzione del Fascio Associato

Dato che  $F_{\text{banco}}$  è un prefascio ma non un fascio, possiamo applicare la costruzione universale della sheafification per ottenere il fascio associato  $F_{\text{banco}}^+$ , che è il "miglior fascio che approssima  $F_{\text{banco}}$ ". Questa costruzione è matematicamente elegante e ha interpretazione semantica interessante.

La sheafification procede attraverso i germi. Per ogni punto  $c \in X$  (un contesto specifico), consideriamo tutte le sezioni di  $F_{\text{banco}}$  definite su aperti contenenti  $c$ . Due sezioni  $s \in F_{\text{banco}}(U)$  e  $t \in F_{\text{banco}}(V)$  con  $c \in U, V$  sono equivalenti come germi in  $c$  se coincidono su un intorno di  $c$ , ovvero se esiste un aperto  $W \subseteq U \cap V$  con  $c \in W$  tale che  $s|_W = t|_W$ . Le classi di equivalenza formano l'insieme dei germi  $(F_{\text{banco}})_c$  in  $c$ .

Il fascio associato  $F_{\text{banco}}^+$  è definito ponendo:  $F_{\text{banco}}^+(U) = \{\text{funzioni } s: U \rightarrow \sqcup_{c \in U} (F_{\text{banco}})_c \text{ tali che } s(c) \in (F_{\text{banco}})_c \text{ per ogni } c \in U, \text{ e } s \text{ è localmente una sezione del prefascio originale}\}$ . In altre parole, le sezioni del fascio associato assegnano a ogni contesto  $c \in U$  un germe di interpretazione in  $c$ , e questa assegnazione deve essere "localmente rappresentabile" da sezioni del prefascio originale.

Per  $F_{\text{banco}}$ , cosa significa concretamente? Consideriamo l'unione  $U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}}$ . Nel prefascio originale  $F_{\text{banco}}$ , non avevamo una sezione globale che estendesse coerentemente  $\sigma_{\text{banca}}$  e  $\sigma_{\text{scuola}}$ . Nel fascio associato  $F_{\text{banco}}^+$ , abbiamo invece sezioni che assegnano a ciascun contesto  $c$  il germe appropriato: se  $c$  è un contesto prettamente bancario ( $c \in U_{\text{banca}} \setminus U_{\text{scuola}}$ ), il germe è  $[\sigma_{\text{banca}}]_c$ ; se  $c$  è prettamente scolastico ( $c \in U_{\text{scuola}} \setminus U_{\text{banca}}$ ), il germe è  $[\sigma_{\text{scuola}}]_c$ ; se  $c$  è nella sovrapposizione problematica ( $c \in U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}$ ), il germe potrebbe essere uno dei due, o un germe più specializzato che risolve l'ambiguità locale.

Interpretativamente, la sheafification rappresenta il processo di "risoluzione locale dell'ambiguità": anche quando non esiste un'interpretazione globale unificata, possiamo sempre specificare, per ogni contesto individuale  $c$ , quale interpretazione è appropriata localmente in  $c$ . Il fascio associato  $F_{\text{banco}}^+$  codifica queste risoluzioni locali in modo coerente, garantendo che sezioni locali compatibili possano essere sempre incollate.

Tuttavia, questa risoluzione ha un prezzo: nel fascio associato, abbiamo perso l'informazione che originalmente c'era ambiguità, che le interpretazioni bancaria e scolastica erano in conflitto. Il fascio associato è "regolarizzato", le ostruzioni all'incollamento sono state rimosse attraverso scelte locali. In semantica, questo corrisponde al fatto che i parlanti effettivamente risolvono ambiguità contestualmente quando necessario, ma la risoluzione dipende da fattori idiosincratici locali (saliency, aspettative, conoscenze pregresse) che non sono completamente codificati nella struttura astratta dello spazio contestuale.

### 8.1.3 Fasci Semantici per Verbi: Il Caso di "correre"

Passiamo ora ad analizzare fasci semantici per verbi, che presentano complessità aggiuntive rispetto ai nomi data la loro struttura argomentale e aspettuale. Consideriamo il verbo italiano "correre", che presenta ricca polisemia contestuale.

Identifichiamo aperti rilevanti:

- $U_{\text{movimento}}$ : contesti dove si descrivono azioni fisiche di movimento, locomozione corporea. Questo è l'uso più basico e letterale.
- $U_{\text{sport}}$ : contesti sportivi, atletici, dove "correre" si riferisce a competizioni regolamentate (corse atletiche, maratone, sprint).
- $U_{\text{velocità}}$ : contesti dove l'enfasi è sulla rapidità più che sul movimento specifico ("il tempo corre", "i pensieri corrono").
- $U_{\text{metaforico\_astratto}}$ : contesti dove "correre" è usato metaforicamente per processi astratti non fisici ("correre un rischio", "corre voce che...").

Definiamo  $F_{\text{correre}}$  su questi aperti:

$F_{\text{correre}}(U_{\text{movimento}}) = \{\sigma_{\text{movimento}}\}$  dove  $\sigma_{\text{movimento}}$  è l'interpretazione: "spostarsi rapidamente mediante azione coordinata delle gambe con fase di volo, ovvero un momento

in cui entrambi i piedi non toccano il suolo, distinguendo la corsa dalla camminata; azione transitiva da una posizione iniziale a una posizione finale attraverso un percorso".

Questa interpretazione specifica il mezzo (azione delle gambe), la modalità (rapidamente, con fase di volo), e la struttura evento (transizione tra posizioni). È l'interpretazione letterale, fisica, basica del verbo.

$F\_correre(U\_sport) = \{\sigma\_sport\}$  dove  $\sigma\_sport$  è l'interpretazione: "partecipare a una competizione atletica regolamentata dove l'obiettivo è spostarsi più rapidamente possibile su una distanza definita, seguendo regole specifiche della federazione sportiva, spesso con cronometraggio preciso, categorie di età/genere, e classificazioni finali".

Questa interpretazione specializza  $\sigma\_movimento$  aggiungendo il contesto competitivo, regolamentare, istituzionale. Include aspetti non puramente fisici ma sociali (competizione), normativi (regole), e teleologici (scopo di vincere/classificarsi).

$F\_correre(U\_velocità) = \{\sigma\_velocità\}$  dove  $\sigma\_velocità$  è interpretazione: "procedere, avanzare, fluire con rapidità elevata", più astratta e applicabile a entità non animate o processi temporali. Per esempio, "il tempo corre" usa questa interpretazione dove il soggetto non è un agente animato ma un'entità astratta (il tempo) conceptualizzata metaforicamente come scorrevole.

$F\_correre(U\_metaforico) = \{\sigma\_metaforico\}$  dove  $\sigma\_metaforico$  copre varie estensioni metaforiche: "correre un rischio" (esporsi a, intraprendere qualcosa con conseguenze incerte), "corre voce" (diffondersi rapidamente, circolare di informazione), "correre dietro a qualcuno" (seguire insistentemente, perseguire), "lasciarsi correre" (procedere senza sforzo opponente).

Mappe di restrizione:

$\rho_{\{U\_movimento, U\_sport\}}$ : specializza l'interpretazione di movimento fisico aggiungendo la cornice competitiva.  $\sigma\_movimento|_{\{U\_sport\}} = \sigma\_sport$ . Concettualmente, l'interpretazione sportiva è un raffinamento, una specificazione dell'interpretazione di movimento in un contesto particolare.

$\rho_{\{U\_movimento, U\_velocità\}}$ : questa è più complessa perché non è puramente una specializzazione ma coinvolge una generalizzazione/astrazione. L'interpretazione di velocità pura estrae l'aspetto della rapidità dall'azione fisica completa, trascurando i dettagli biomeccanici specifici della corsa. Potremmo modellare questo come una mappa che proietta su tratti semantici selezionati:  $\sigma\_movimento \mapsto [+rapido, +processuale, -dettagli\_fisici] = \sigma\_velocità$ .

$\rho_{\{U\_velocità, U\_metaforico\}}$ : estensione metaforica che trasferisce la struttura concettuale della rapidità processuale a domini astratti. Questa è una mappa più complessa che coinvolge mapping concettuali cross-domain.

Un aspetto interessante emerge considerando la struttura argomentale. "Correre" può essere intransitivo ("Giovanni corre") o transitivo con argomento di percorso o distanza ("Giovanni ha corso dieci chilometri", "Giovanni corre la maratona"). Il fascio  $F\_correre$

dovrebbe in realtà codificare non solo interpretazioni del verbo ma frame di eventi completi con strutture argomentali. Una modellazione più sofisticata userebbe fasci di frame semantici piuttosto che singole interpretazioni.

### 8.1.4 Fasci Semantici per Aggettivi Graduabili: Il Caso di "alto"

Gli aggettivi graduabili come "alto", "veloce", "caro" presentano dipendenza contestuale di tipo quantitativo oltre che qualitativo: non solo il significato cambia da contesto a contesto, ma anche gli standard di valutazione, le soglie che determinano l'applicabilità del predicato graduabile.

Per "alto", identifichiamo aperti basati sul dominio di comparazione:

- $U_{\text{persone}}$ : contesti dove si discutono esseri umani, la loro altezza fisica
- $U_{\text{edifici}}$ : contesti architettonici, discussioni di costruzioni verticali
- $U_{\text{montagne}}$ : contesti geografici, geologici
- $U_{\text{basket}}$ : contesti sportivi specifici (giocatori di pallacanestro)
- $U_{\text{pigmei}}$ : contesti etnografici riguardanti popolazioni di statura particolarmente bassa

Definiamo  $F_{\text{alto}}$  come fascio di predicati graduabili:

$F_{\text{alto}}(U)$  assegna a ciascun aperto  $U$  non una singola interpretazione qualitativa ma una funzione  $\text{graded\_alto}_U: \text{Individui} \times U \rightarrow [0, 1]$  che per ogni individuo  $x$  e ogni contesto  $c \in U$  specifica il grado in cui  $x$  è "alto" valutato in  $c$ .

Questa funzione ha due componenti:

1. Una funzione di misurazione  $\mu_U: \text{Individui} \rightarrow \mathbb{R}$  che assegna a ogni individuo la sua altezza fisica in centimetri (questo è costante attraverso contesti, è una proprietà fisica invariante)
2. Una funzione di standard  $\sigma_U: U \rightarrow \mathbb{R}$  che assegna a ogni contesto  $c$  la soglia di altezza considerata "alta" in quel contesto

Un individuo  $x$  è considerato "alto" nel contesto  $c$  se  $\mu(x) > \sigma_U(c)$ .

Le mappe di restrizione operano sugli standard: se  $V \subseteq U$ , allora  $\rho_{\{U,V\}}$  prende la funzione  $\text{graded\_alto}_U$  e la restringe a  $V$ , potenzialmente modificando la funzione di standard. Per esempio:

$\rho_{\{U_{\text{persone}}, U_{\text{basket}}\}}$ : restringe da contesti generali su persone a contesti specifici di pallacanestro. Lo standard aumenta drammaticamente:  $\sigma_{\{U_{\text{basket}}\}}(c) \gg \sigma_{\{U_{\text{persone}}\}}(c)$  per  $c \in U_{\text{basket}}$ , perché i giocatori di basket sono in media molto più alti della popolazione generale. Un individuo alto 180 cm potrebbe soddisfare "alto" in  $U_{\text{persone}}$  ma non in  $U_{\text{basket}}$ .

$\rho_{\{U_{\text{persone}}, U_{\text{pigmei}}\}}$ : restringe a contesti etnografici su popolazioni pigmee. Lo standard diminuisce:  $\sigma_{\{U_{\text{pigmei}}\}}(c) \ll \sigma_{\{U_{\text{persone}}\}}(c)$ , perché l'altezza media in queste popolazioni è significativamente inferiore. Un individuo alto 160 cm potrebbe soddisfare "alto" in  $U_{\text{pigmei}}$  ma non in  $U_{\text{persone}}$  generale.



Questa modellazione cattura il fenomeno ben documentato della relatività degli aggettivi graduabili agli standard contestuali di comparazione. La frase "Giovanni è alto" può essere vera in un contesto ma falsa in un altro, pur riferendosi allo stesso individuo Giovanni con la stessa altezza fisica immutata. Ciò che cambia non è la proprietà fisica ma lo standard valutativo contestuale  $\sigma(c)$ .

Un'estensione interessante riguarda i modificatori di grado come "molto", "abbastanza", "estremamente". Questi possono essere modellati come operatori sui fasci di predicati graduabili che modificano le funzioni di grado o le soglie:

$$[[\text{molto}]]_U: F_{\text{alto}}(U) \rightarrow F_{\text{molto\_alto}}(U)$$

dove  $F_{\text{molto\_alto}}(U)$  ha soglia  $\sigma_{\{\text{molto\_alto}\}}(c) = \sigma_{\{\text{alto}\}}(c) + k$  per qualche costante  $k$  dipendente da  $U$  (quanto "molto" sposta la soglia dipende dal contesto).

I comparativi introducono complessità aggiuntiva perché coinvolgono confronti tra gradi in potenzialmente contesti diversi:

"Giovanni è più alto a Milano che a Amsterdam"

Questa frase confronta l'applicabilità del predicato "alto" a Giovanni in due contesti geografico-culturali diversi (Milano con italiani di statura media, Amsterdam con olandesi più alti in media). Non sta asserendo che Giovanni cambia altezza fisica, ma che lo standard relativo varia, quindi la sua classificazione come "alto" o meno varia.

### 8.1.5 Fasci Semantici per Deittici: Il Caso di "qui"

I deittici rappresentano dipendenza contestuale nella sua forma più pura e diretta. Il referente di "qui" cambia in modo completamente sistematico e prevedibile in funzione di una singola coordinata contestuale: la posizione spaziale del punto di enunciazione.

Modelliamo  $X_{\text{loc}} \subseteq \mathbb{R}^3$  come lo spazio euclideo tridimensionale dei luoghi fisici (o una sua approssimazione/discretizzazione). Il fascio  $F_{\text{qui}}$  è definito in modo molto semplice:

$$F_{\text{qui}}(U) = \{\text{funzioni } s: U \rightarrow P(\mathbb{R}^3) \text{ tali che per ogni } c \in U, s(c) \text{ è una regione spaziale contenente } \pi_{\text{loc}}(c)\}$$

dove  $\pi_{\text{loc}}: X \rightarrow X_{\text{loc}}$  è la proiezione sulla componente locativa del contesto, e  $s(c)$  è la regione denotata da "qui" nel contesto  $c$ .

In formulazione più precisa, per contesti con componente locativa ben definita:

$$F_{\text{qui}}(U)(c) = B(\pi_{\text{loc}}(c), \varepsilon(c))$$

dove  $B(l, \varepsilon)$  è la palla aperta di raggio  $\varepsilon$  centrata in  $l \in \mathbb{R}^3$ , e  $\varepsilon(c)$  è un raggio contestualmente determinato che specifica quanto è "grande" la regione designata da "qui" nel contesto  $c$ .

Il raggio  $\varepsilon(c)$  non è fisso ma dipende dal contesto in modi complessi:

- In contesti dove si discutono dettagli di posizionamento preciso (chirurgia, assemblaggio meccanico),  $\varepsilon(c)$  potrebbe essere millimetri o centimetri
- In contesti conversazionali ordinari in una stanza,  $\varepsilon(c)$  potrebbe essere metri (l'intera stanza o zona della stanza)
- In contesti geografici, discussioni di città o regioni,  $\varepsilon(c)$  potrebbe essere chilometri ("qui a Milano" designa l'intera area metropolitana)

Le mappe di restrizione per  $F_{\text{qui}}$  sono quasi banali: se  $V \subseteq U$  e tutti i contesti in  $V$  hanno componenti locative simili (per esempio,  $V \subseteq U$  è un sottoinsieme di contesti tutti situati nella stessa stanza), allora  $\rho_{\{U,V\}}$  semplicemente restringe il dominio della funzione mantenendo i valori.

Tuttavia, c'è un aspetto sottile: "qui" può riferirsi non solo alla posizione fisica immediata ma anche a livelli di granularità diversi:

- "qui" (indicando il punto esatto dove si sta appoggiando la mano)
- "qui" (indicando la sedia o il tavolo dove si siede)
- "qui" (indicando la stanza)
- "qui" (indicando l'edificio)
- "qui" (indicando il quartiere, la città)

Questi non sono significati diversi ma livelli di granularità dello stesso significato deittico, selezionati contestualmente. Il fascio  $F_{\text{qui}}$  dovrebbe codificare questa struttura multi-scalare, forse attraverso una famiglia di fasci indicizzati per livello di granularità, o attraverso un fascio di regioni annidate.

### 8.1.6 Fasci Semantici per Quantificatori: "alcuni" e "tutti"

I quantificatori nominali come "alcuni" e "tutti" presentano comportamenti semantici complessi che coinvolgono domini di quantificazione contestualmente ristretti. La semantica formale classica tratta quantificatori come operatori logici che variano su tutto il dominio del discorso, ma empiricamente i quantificatori sono sempre implicitamente ristretti a domini contestualmente salienti.

Per "alcuni", definiamo un fascio  $F_{\text{alcuni}}$  che assegna a ogni contesto  $c$  un operatore di quantificazione esistenziale ristretto:

$$F_{\text{alcuni}}(U)(c) = \lambda P. \lambda Q. \exists x \in D(c) [P(x) \wedge Q(x)]$$

dove  $D(c)$  è il dominio di quantificazione salienti nel contesto  $c$ , tipicamente un sottoinsieme molto ristretto del dominio universale di tutte le entità esistenti.

Per esempio, nella frase "Alcuni studenti hanno passato l'esame" pronunciata durante una lezione dal professore, il dominio  $D(c)$  non è "tutti gli studenti esistenti nell'universo" ma "gli studenti iscritti a questo corso in questo semestre", un insieme molto più ristretto determinato dal contesto conversazionale e situazionale.

Le mappe di restrizione modellano come i domini di quantificazione si restringono o espandono quando cambiamo contesto:

Se  $V \subseteq U$  e  $V$  rappresenta un sottocontesto più specifico, spesso  $D_V(c) \subseteq D_U(c)$  per  $c \in V$ : il dominio si restringe ulteriormente. Per esempio, se  $U$  è un contesto di discussione generale su studenti universitari e  $V \subseteq U$  è un contesto di discussione specifica su studenti di matematica, allora  $D_V(c)$  contiene solo studenti di matematica, sottoinsieme di  $D_U(c)$  che conteneva tutti gli studenti universitari.

Questa restrizione contestuale dei domini è cruciale per spiegare fenomeni come:

Le implicature scalari: "Alcuni studenti hanno passato l'esame" implica conversazionalmente "non tutti gli studenti hanno passato l'esame" per la massima di quantità di Grice. Questa implicatura dipende essenzialmente dal fatto che "alcuni" e "tutti" quantificano sullo stesso dominio contestuale  $D(c)$ . Se i domini fossero diversi, l'implicatura non sorgerebbe.

Le inferenze di disponibilità (accommodation): Se dico "Alcuni libri sul tavolo sono rossi" presuppongo che ci siano libri sul tavolo. Il dominio  $D(c)$  per "alcuni libri sul tavolo" deve essere non vuoto perché il quantificatore possa operare felicemente. Se l'ascoltatore non era a conoscenza di libri sul tavolo, deve accomodare questa informazione presupposta nel common ground per dare senso all'enunciato.

## 8.2 Fasci Semantici Proposizionali: Da Espressioni Subfrasali a Proposizioni Complete

Finora abbiamo discusso fasci per parole e sintagmi individuali. Passiamo ora a considerare fasci per intere proposizioni, enunciati completi che esprimono contenuti proposizionali valutabili per verità o falsità. Questi fasci proposizionali codificano come le condizioni di verità di proposizioni variano contestualmente.

### 8.2.1 Fascio Proposizionale per "Il banco è vuoto"

Consideriamo la proposizione  $p$  = "Il banco è vuoto". Il fascio proposizionale  $F_p$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq X$  un insieme di condizioni di verità contestuali:

$F_p(U) = \{\text{funzioni } \varphi: U \rightarrow \{0, 1\} \text{ che specificano in quali contesti } c \in U \text{ la proposizione } p \text{ è vera}\}$

Più precisamente,  $\varphi(c) = 1$  se  $p$  è vera quando valutata nel contesto  $c$ ,  $\varphi(c) = 0$  se  $p$  è falsa in  $c$ .

Ma cosa significa esattamente che  $p$  è vera in  $c$ ? Questo dipende essenzialmente dall'interpretazione contestuale dei costituenti. "Banco" ha interpretazione che varia come abbiamo visto ( $F_{\text{banco}}$ ), e "vuoto" ha anch'esso interpretazione variabile (vuoto di cosa? studenti per banco scolastico, clienti per banco bancario, merci per banco di mercato).

Per  $U_{\text{banca}}$ :  $F_p(U_{\text{banca}})$  contiene funzioni  $\varphi_{\text{banca}}$  dove  $\varphi_{\text{banca}}(c) = 1$  se e solo se nel contesto  $c$ , lo sportello bancario rilevante è vuoto nel senso di non avere clienti in attesa o non essere presidiato da impiegati (interpretazione dipende da ulteriori specificazioni contestuali).

Per  $U_{\text{scuola}}$ :  $F_p(U_{\text{scuola}})$  contiene funzioni  $\phi_{\text{scuola}}$  dove  $\phi_{\text{scuola}}(c) = 1$  se e solo se il banco scolastico rilevante è vuoto nel senso di non essere occupato da studenti.

Per  $U_{\text{mercato}}$ :  $F_p(U_{\text{mercato}})$  contiene  $\phi_{\text{mercato}}$  dove  $\phi_{\text{mercato}}(c) = 1$  se e solo se il banco di vendita non ha merci esposte.

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_p(U) \rightarrow F_p(V)$  operano restringendo il dominio delle funzioni caratteristiche: se  $\phi \in F_p(U)$  specifica in quali contesti di  $U$  la proposizione è vera, allora  $\phi|_V \in F_p(V)$  specifica in quali contesti del sottoinsieme  $V$  la proposizione è vera, semplicemente restringendo  $\phi$  al sottodominio  $V$ .

La composizionalità del fascio proposizionale riflette la composizionalità semantica:  $F_p$  dovrebbe essere costruibile sistematicamente a partire dai fasci dei costituenti  $F_{\text{banco}}$  e  $F_{\text{vuoto}}$  attraverso operazioni funtoriali che rispettano la struttura sintattica. Formalmente, dovremmo avere morfismi che implementano regole di composizione tipo:

$$F_{\{NP VP\}}(U) = \text{Apply}(F_{\{VP\}}(U), F_{\{NP\}}(U))$$

dove  $\text{Apply}$  combina il fascio del sintagma verbale con quello del sintagma nominale secondo le regole di applicazione funzionale nella semantica compositiva.

### 8.2.2 Proposizioni Modali e Fasci su Topologie Alessandrine

Consideriamo proposizioni con operatori modali, per esempio  $p = \text{"È necessario che il banco sia chiuso la domenica"}$  (interpretato deonticamente: c'è una norma, regola, legge che impone la chiusura domenicale).

Per trattare questi casi, è utile lavorare su uno spazio contestuale dove una componente è uno spazio alessandrino di mondi deontici  $W$  con relazione di accessibilità deontica  $R_d$ .  $wR_d w'$  significa " $w'$  è deonticamente accessibile da  $w$ ", ovvero " $w'$  è compatibile con le norme/leggi/obblighi vigenti in  $w$ ".

Il fascio  $F_p$  per la proposizione modale assegna a un aperto  $U \subseteq W$  la condizione:

$$F_p(U)(w) = 1 \Leftrightarrow \text{per ogni } w' \in U_w = \{w'' : wR_d w''\}, \phi_{\text{base}}(w') = 1$$

dove  $\phi_{\text{base}}$  è la condizione di verità della proposizione base "il banco è chiuso la domenica" (senza l'operatore modale), e  $U_w$  è l'intorno alessandrino di  $w$ , ovvero tutti i mondi deonticamente accessibili da  $w$ .

La topologia alessandrina garantisce che  $U_w$  sia aperto, e la condizione modale  $\Box\phi$  corrisponde esattamente alla verità di  $\phi$  su tutto l'intorno aperto  $U_w$ . Le mappe di restrizione riflettono la transitività della relazione di accessibilità deontica: se  $V \subseteq U$  sono aperti alessandrini, restringere una sezione modale mantiene la struttura modale.

## 8.3 Operazioni Categoriali sui Fasci Semantici

Dopo aver definito fasci semantici individuali per espressioni lessicali e proposizioni, possiamo ora considerare come costruire fasci complessi a partire da fasci più semplici

usando operazioni categoriali. La categoria  $\text{Sh}(X)$  dei fasci su  $X$  ammette molte costruzioni universali che hanno interpretazioni semantiche naturali.

### 8.3.1 Prodotti di Fasci e Congiunzione Semantica

Dati due fasci  $F$  e  $G$  su  $X$ , il loro prodotto  $F \times G$  è il fascio definito ponendo:

$$(F \times G)(U) = F(U) \times G(U)$$

ovvero l'insieme delle coppie  $(s, t)$  dove  $s \in F(U)$  e  $t \in G(U)$ . Le mappe di restrizione operano componente per componente:  $\rho_{\{U,V\}}(s, t) = (\rho^F_{\{U,V\}}(s), \rho^G_{\{U,V\}}(t))$ .

Semanticamente, il prodotto modella la congiunzione o la co-presenza di interpretazioni. Se  $F_\phi$  è il fascio per una proposizione  $\phi$  e  $F_\psi$  è il fascio per  $\psi$ , allora  $F_\phi \times F_\psi$  rappresenta la proposizione congiunta  $\phi \wedge \psi$ : una sezione  $(s_\phi, s_\psi) \in (F_\phi \times F_\psi)(U)$  specifica simultaneamente le condizioni di verità di  $\phi$  e di  $\psi$  su  $U$ , e  $\phi \wedge \psi$  è vera in un contesto  $c$  se e solo se entrambe le componenti sono vere in  $c$ .

Il prodotto ha la proprietà universale attesa: per ogni fascio  $H$  e morfismi  $f: H \rightarrow F$  e  $g: H \rightarrow G$ , esiste un unico morfismo  $\langle f, g \rangle: H \rightarrow F \times G$  tale che  $\pi_F \circ \langle f, g \rangle = f$  e  $\pi_G \circ \langle f, g \rangle = g$ , dove  $\pi_F$  e  $\pi_G$  sono le proiezioni. Questa proprietà garantisce che il prodotto sia la "costruzione più generale" che combina due fasci preservando tutta l'informazione di entrambi.

### 8.3.2 Coprodotti di Fasci e Disgiunzione Semantica

Il coprodotto (o somma disgiunta)  $F \sqcup G$  è definito ponendo:

$$(F \sqcup G)(U) = F(U) \sqcup G(U)$$

ovvero l'unione disgiunta insiemistica, dove etichettiamo ogni elemento per ricordare da quale fascio proviene. Le restrizioni operano sui fattori individualmente.

Semanticamente, il coprodotto modella disgiunzione esclusiva o alternativa di tipi semantici. Per esempio, se  $F_{\text{nome}}$  modella interpretazioni nominali e  $F_{\text{verbo}}$  modella interpretazioni verbali, allora  $F_{\text{nome}} \sqcup F_{\text{verbo}}$  potrebbe rappresentare un fascio di "espressioni lessicali ambigue tra nome e verbo" dove in ciascun contesto l'espressione è interpretata come l'una o l'altra categoria, ma non entrambe simultaneamente.

Il coprodotto gode della proprietà universale duale a quella del prodotto: per ogni fascio  $H$  e morfismi  $f: F \rightarrow H$  e  $g: G \rightarrow H$ , esiste un unico morfismo  $[f, g]: F \sqcup G \rightarrow H$  che "ricombina" le componenti.

### 8.3.3 Esponenziali di Fasci e Intensionalità

In categorie con buone proprietà (come categorie cartesiane chiuse), possiamo definire esponenziali o oggetti di morfismi interni. Per fasci, l'esponenziale  $G^F$  (quando esiste) è il fascio le cui sezioni su  $U$  rappresentano "morfismi di fasci variabili" da  $F$  a  $G$  parametrizzati da  $U$ .

Formalmente,  $G^*F(U)$  consiste di famiglie  $\{\varphi_V: F(V) \rightarrow G(V) \mid V \text{ aperto di } X\}$  di funzioni compatibili con restrizioni, dove la famiglia può variare "continuamente" su  $U$  nel senso di una certa continuità categoriale.

Semanticamente, gli esponenziali modellano intensionalità, contesti opachi, funzioni da mondi possibili a denotazioni. Per esempio, se  $F_{\text{mondo}}$  è il fascio dei mondi possibili e  $F_{\text{prop}}$  è il fascio delle proposizioni, allora  $F_{\text{prop}}^{*}F_{\text{mondo}}$  potrebbe rappresentare il fascio delle proposizioni intensionali, quelle il cui valore di verità varia da mondo a mondo.

In semantica intensionale standard (Montague, Kripke), i significati intensionali sono modellati come funzioni da indici (mondo, tempo) a estensioni. Il fascio esponenziale formalizza questa idea in modo più generale e topologicamente raffinato: invece di indici discreti, abbiamo uno spazio topologico continuo di contesti, e invece di funzioni arbitrarie, abbiamo morfismi di fasci che rispettano la struttura topologica locale.

### 8.3.4 Immagini Dirette e Inverse: Trasferimento Semantico tra Spazi

Date due funzioni continue  $f: X \rightarrow Y$  tra spazi contestuali (per esempio, una mappa che "dimentica" alcune dimensioni contestuali, proiettando da uno spazio multidimensionale a uno più semplice), possiamo trasferire fasci tra  $X$  e  $Y$ .

L'immagine diretta  $f_*F$  di un fascio  $F$  su  $X$  è il fascio su  $Y$  definito da:

$$(f_*F)(V) = F(f^{-1}(V))$$

per ogni aperto  $V \subseteq Y$ . Intuitivamente, le sezioni di  $f_*F$  su un aperto  $V$  di  $Y$  sono esattamente le sezioni di  $F$  sulla preimmagine  $f^{-1}(V)$  in  $X$ .

Semanticamente,  $f_*F$  modella interpretazioni che "vivono naturalmente" nello spazio più ricco  $X$  ma vengono "osservate" o "misurate" dallo spazio più semplice  $Y$ . Per esempio, se  $f: X \rightarrow X_{\text{temp}}$  è la proiezione su un quoziente che identifica contesti con la stessa componente temporale, allora  $f_*F_{\text{qui}}$  (dove  $F_{\text{qui}}$  è il fascio deittico per "qui") rappresenta interpretazioni di "qui" parametrizzate dal tempo:  $f_*F_{\text{qui}}(V)$  contiene tutte le interpretazioni spaziali di "qui" in contesti la cui proiezione temporale appartiene a  $V$ .

L'immagine inversa  $f^*G$  di un fascio  $G$  su  $Y$  è più delicata da definire e richiede sheafification. Intuitivamente,  $f^*G$  "tira indietro" interpretazioni da  $Y$  a  $X$ : se  $G$  assegna interpretazioni a regioni di  $Y$ ,  $f^*G$  assegna le corrispondenti interpretazioni alle preimmagini di quelle regioni in  $X$ , ma in modo coerente con la struttura di fascio.

Formalmente,  $f^*G$  è definito come sheafification del prefascio  $U \mapsto \lim_{V \supseteq f(U)} G(V)$ , dove il limite è preso su tutti gli aperti  $V$  di  $Y$  che contengono l'immagine  $f(U)$ .

Semanticamente,  $f^*G$  modella situazioni dove interpretazioni sono naturalmente definite nello spazio più semplice  $Y$  (perché dipendono solo da alcune dimensioni contestuali), ma vogliamo estenderle/sollevarle allo spazio più ricco  $X$ . Per esempio, se interpretazioni di un termine temporale "ieri" dipendono solo dalla coordinata temporale (quindi vivono su  $Y = X_{\text{temp}}$ ), ma vogliamo lavorare nello spazio completo  $X = X_{\text{ling}} \times X_{\text{sit}} \times \dots$ , allora  $f^*F_{\text{ieri}}$  solleva queste interpretazioni temporali allo spazio completo, rendendole costanti sulle dimensioni irrilevanti.

Le operazioni  $f_*$  e  $f^*$  formano una coppia di funtori aggiunti:  $f^* \dashv f_*$ , ovvero per ogni fascio  $F$  su  $X$  e  $G$  su  $Y$  abbiamo una bijezione naturale:

$$\text{Hom}_{\{\text{Sh}(Y)\}}(f_*F, G) \cong \text{Hom}_{\{\text{Sh}(X)\}}(F, f^*G)$$

Questa aggiunzione ha profonde conseguenze matematiche e cattura formalmente l'idea che "spingere avanti" e "tirare indietro" interpretazioni sono operazioni duali che si comportano coerentemente.

## 8.4 Fasci di Strutture Sintattiche e Interfaccia Sintassi-Semantica

Finora abbiamo principalmente discusso fasci di interpretazioni semantiche (significati, denotazioni, condizioni di verità). Ma possiamo anche definire fasci di strutture sintattiche, modellando come la forma sintattica delle espressioni varia contestualmente, e studiare l'interfaccia tra sintassi e semantica attraverso morfismi tra questi fasci.

### 8.4.1 Fascio delle Realizzazioni Sintattiche Contestuali

Consideriamo un fascio  $F_{\text{syn}}$  che assegna a ogni aperto  $U \subseteq X$  l'insieme delle possibili realizzazioni sintattiche di un'espressione in contesti  $U$ :

$$F_{\text{syn}}(U) = \{\text{strutture sintattiche, alberi di derivazione, sequenze di forme linguistiche ammissibili nei contesti } c \in U\}$$

Per esempio, l'espressione di una richiesta può avere realizzazioni sintattiche molto diverse a seconda del contesto sociale:

- In  $U_{\text{formale}}$ :  $F_{\text{syn}}(U_{\text{formale}})$  contiene strutture come "Potrebbe cortesemente chiudere la finestra?", "Sarebbe possibile chiudere la finestra?", formule indirette, modi condizionali.
- In  $U_{\text{informale}}$ :  $F_{\text{syn}}(U_{\text{informale}})$  contiene "Chiudi la finestra", "Puoi chiudere la finestra?", forme più dirette, modi imperativi o interrogativi semplici.
- In  $U_{\text{intimo}}$ :  $F_{\text{syn}}(U_{\text{intimo}})$  potrebbe contenere ellissi estreme "La finestra?" o anche gesti non verbali codificati.

Le mappe di restrizione catturano come, restringendoci a sottocontesti più specifici, le opzioni sintattiche si specializzano:  $p_{\{U_{\text{formale}}, U_{\text{formale}} \cap U_{\text{gerarchico}}\}}$  potrebbe eliminare forme troppo informali o colloquiali anche se grammaticalmente corrette, selezionando solo strutture sintattiche appropriate a contesti formali con marcata gerarchia sociale.

### 8.4.2 Morfismi di Interpretazione: Dalla Sintassi alla Semantica

L'interpretazione semantica può essere modellata come un morfismo di fasci  $\Phi: F_{\text{syn}} \rightarrow F_{\text{sem}}$ , dove  $F_{\text{sem}}$  è il fascio delle interpretazioni semantiche. Per ogni aperto  $U$ ,  $\Phi_U$ :

$F_{\text{syn}}(U) \rightarrow F_{\text{sem}}(U)$  è una funzione che assegna a ogni struttura sintattica ammissibile in  $U$  la sua interpretazione semantica in  $U$ .

La compatibilità di  $\Phi$  con le restrizioni garantisce composizionalità contestuale: interpretare una struttura sintattica e poi restringere a un sottocontesto dà lo stesso risultato che restringere la struttura sintattica e poi interpretare. Formalmente:

$$\rho^{\{\text{sem}\}}\{U, V\} \circ \Phi_U = \Phi_V \circ \rho^{\{\text{syn}\}}\{U, V\}$$

Questo commutatività esprime che l'interpretazione rispetta la struttura locale contestuale: non importa se specializziamo prima la struttura sintattica al sottocontesto e poi interpretiamo, o se interpretiamo nel contesto ampio e poi specializziamo l'interpretazione.

Un morfismo di interpretazione non iniettivo  $\Phi_U$  modella ambiguità strutturale: molteplici strutture sintattiche possono avere la stessa interpretazione semantica in un dato contesto (sinonimia), e viceversa una struttura sintattica può avere molteplici interpretazioni (ambiguità). La fibra  $\Phi_U^{-1}(\sigma)$  per un'interpretazione  $\sigma$  è l'insieme di tutte le strutture sintattiche che realizzano  $\sigma$  in  $U$ .

#### 8.4.3 Fasci di Frame Semantici e Ruoli Tematici

Una modellazione più sofisticata dell'interfaccia sintassi-semantica usa fasci di frame semantici (nel senso di FrameNet: strutture schematiche che organizzano conoscenza su situazioni, eventi, relazioni). Un fascio di frame  $F_{\text{frame}}$  assegna a ogni contesto  $U$  non singole denotazioni ma frame completi con ruoli tematici, partecipanti, relazioni causali, aspetti temporali.

Per esempio, il frame `TRANSAZIONE_COMMERCIALE` associato al verbo "comprare" include ruoli come:

- **ACQUIRENTE** (agente che acquisisce beni)
- **VENDITORE** (agente che cede beni)
- **BENI** (oggetti trasferiti)
- **DENARO** (mezzo di scambio)
- **LUOGO** (dove avviene la transazione)
- **TEMPO** (quando avviene)

Il fascio  $F_{\text{comprare}}$  assegna a ogni contesto  $U$  questo frame con specificazioni contestuali dei ruoli. In contesti di e-commerce ( $U_{\text{online}}$ ), il ruolo **LUOGO** potrebbe essere virtualizzato o frammentato (luogo del venditore, dell'acquirente, dei server). In contesti storici pre-monetari ( $U_{\text{baratto}}$ ), il ruolo **DENARO** è sostituito da **BENI\_SCAMBIATI** contrapposti.

Le mappe di restrizione specializzano i frame: restringendo a sottocontesti più specifici, i ruoli tematici ricevono vincoli tipologici più stretti, i requisiti di realizzazione sintattica si precisano, le inferenze associate si arricchiscono.

### 8.5 Coomologia dei Fasci Semantici: Teoria Sistemica delle Ostruzioni



Arriviamo ora alla parte matematicamente più avanzata e concettualmente più profonda della teoria: la coomologia dei fasci semantici. La coomologia fornisce strumenti algebrici potenti per misurare, classificare, quantificare le ostruzioni all'esistenza di interpretazioni globali coerenti. Dopo aver introdotto i concetti base nel documento originale, sviluppiamo ora la teoria in modo sistematico e completo.

### 8.5.1 Complessi di Cocatene e Cobordi: Costruzione Dettagliata

Sia  $F$  un prefascio (o fascio) su uno spazio topologico  $X$ , e sia  $U = \{U_i\}_{i \in I}$  un ricoprimento aperto di  $X$  (ovvero,  $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ ). Definiamo il complesso di Čech associato a questo ricoprimento.

Le 0-cocatene sono elementi del prodotto  $\prod_{i \in I} F(U_i)$ , ovvero tuple  $(s_i)_{i \in I}$  dove ciascun  $s_i \in F(U_i)$  è una sezione su  $U_i$ . Denotiamo questo insieme  $C^0(U, F) = \prod_{i \in I} F(U_i)$ . Interpretativamente, una 0-cocatena assegna a ogni pezzo del ricoprimento un'interpretazione locale.

Le 1-cocatene sono elementi di  $\prod_{\{i,j \in I\}} F(U_i \cap U_j)$ , ovvero tuple  $(s_{ij})_{\{i,j \in I\}}$  dove ciascun  $s_{ij} \in F(U_i \cap U_j)$  è una sezione sulla sovrapposizione di  $U_i$  e  $U_j$ . Denotiamo  $C^1(U, F) = \prod_{\{i,j \in I\}} F(U_i \cap U_j)$ . Interpretativamente, una 1-cocatena specifica dati sulle sovrapposizioni doppie dei pezzi.

Più generalmente, le  $n$ -cocatene sono  $C^n(U, F) = \prod_{\{i_0, \dots, i_n \in I\}} F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n})$ , elementi delle intersezioni  $(n+1)$ -uple del ricoprimento.

Definiamo operatori di cobordo  $\delta^n: C^n(U, F) \rightarrow C^{n+1}(U, F)$ . Per  $n = 0$ , il cobordo di una 0-cocatena  $(s_i)$  è la 1-cocatena  $(\delta s)_{ij}$  definita da:

$$(\delta^0 s)_{ij} = s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}$$

(dove "-" è un'operazione appropriata: per fasci di gruppi abeliani è la sottrazione, per fasci di insiemi è un'operazione più astratta che misura la discrepanza).

Interpretativamente,  $\delta^0$  misura quanto le sezioni locali differiscono sulle sovrapposizioni. Se  $(\delta^0 s)_{ij} = 0$  per ogni coppia  $i, j$ , allora le sezioni locali sono compatibili sulle sovrapposizioni.

Per  $n = 1$ , il cobordo di una 1-cocatena  $(t_{ij})$  è la 2-cocatena  $(\delta^1 t)_{ijk}$  definita da:

$$(\delta^1 t)_{ijk} = t_{ij}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} - t_{ik}|_{U_i \cap U_j \cap U_k} + t_{jk}|_{U_i \cap U_j \cap U_k}$$

Questa formula cattura la "coerenza" delle discrepanze sulle triple intersezioni: se abbiamo discrepanze  $t_{ij}$ ,  $t_{ik}$ ,  $t_{jk}$  sulle coppie, sono coerenti se  $\delta^1 t = 0$ .

Una proprietà fondamentale è che  $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$ , ovvero la composizione di due operatori di cobordo consecutivi è sempre zero. Questo significa che  $\{C^n(U, F), \delta^n\}$  forma un complesso di cocatene:

$$C^0(U, F) \xrightarrow{\delta^0} C^1(U, F) \xrightarrow{\delta^1} C^2(U, F) \xrightarrow{\delta^2} \dots$$

dove ogni freccia composta con la successiva dà zero.

### 8.5.2 Cocicli, Cobordi e Gruppi di Coomologia: Definizioni Precise

Un  $n$ -cociclo è una  $n$ -cocatena  $z \in C^n(U, F)$  tale che  $\delta^n z = 0$ . L'insieme di tutti gli  $n$ -cocicli forma un gruppo (o insieme) denotato  $Z^n(U, F) = \text{Ker}(\delta^n)$ . Interpretativamente, i cocicli sono configurazioni di dati locali che soddisfano condizioni di coerenza sulle intersezioni di ordine superiore.

Un  $n$ -cobordo è una  $n$ -cocatena che è l'immagine di una  $(n-1)$ -cocatena sotto  $\delta^{n-1}$ , ovvero  $b \in C^n(U, F)$  tale che esiste  $c \in C^{n-1}(U, F)$  con  $b = \delta^{n-1}c$ . L'insieme di tutti gli  $n$ -cobordi forma un gruppo  $B^n(U, F) = \text{Im}(\delta^{n-1})$ . Interpretativamente, i cobordi sono configurazioni che "provengono" da un livello inferiore, che sono "spiegabili" come differenze di dati al livello precedente.

La proprietà fondamentale  $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$  implica che  $B^n(U, F) \subseteq Z^n(U, F)$ : ogni cobordo è automaticamente un cociclo (l'immagine di  $\delta^{n-1}$  è contenuta nel nucleo di  $\delta^n$ ). Questo permette di definire il quoziente:

$$H^n(U, F) = Z^n(U, F) / B^n(U, F)$$

che è l' $n$ -esimo gruppo di coomologia di Čech del fascio  $F$  rispetto al ricoprimento  $U$ .

Interpretativamente,  $H^n(U, F)$  misura i "cocicli non banali", ovvero configurazioni che sono localmente coerenti (sono cocicli) ma non sono spiegabili come derivanti da dati di livello inferiore (non sono cobordi). Questi rappresentano ostruzioni genuine, fenomeni emergenti che non si riducono a strutture più semplici.

### 8.5.3 Indipendenza dal Ricoprimento e Coomologia del Fascio

Un aspetto tecnico importante è che i gruppi di coomologia di Čech  $H^n(U, F)$  dipendono in linea di principio dal ricoprimento  $U$  scelto. Ricoprimenti diversi possono dare gruppi di coomologia diversi. Tuttavia, per fasci (a differenza di prefasci arbitrari), esiste un teorema fondamentale:

**Teorema (Indipendenza dal Ricoprimento):** Se  $F$  è un fascio e  $U, V$  sono due ricoprimenti aperti di  $X$ , con  $V$  raffinamento di  $U$  (ovvero ogni elemento di  $V$  è contenuto in qualche elemento di  $U$ ), allora esiste un isomorfismo canonico  $H^n(U, F) \cong H^n(V, F)$  per ogni  $n$ .

Più generalmente, passando al limite su ricoprimenti sempre più fini (limite diretto), otteniamo i gruppi di coomologia del fascio indipendenti dalla scelta del ricoprimento:

$$H^n(X, F) = \varinjlim \{U\} H^n(U, F)$$

dove il limite è preso su tutti i ricoprimenti aperti di  $X$  ordinati per raffinamento.

Questo è un risultato potente perché garantisce che la coomologia è una proprietà intrinseca del fascio  $F$  sullo spazio  $X$ , non dipendente da scelte arbitrarie di come decomporre  $X$  in pezzi.

Per calcoli concreti, possiamo quindi scegliere un ricoprimento  $U$  conveniente che semplifichi i calcoli, sapendo che il risultato (a meno di isomorfismo) sarà lo stesso di qualunque altro ricoprimento sufficientemente fine.

#### 8.5.4 Interpretazione Semantica di $H^0$ , $H^1$ , $H^2$

Esaminiamo ora il significato semantico concreto dei primi gruppi di coomologia.

##### $H^0(X, F)$ : Sezioni Globali

Il gruppo  $H^0(X, F)$  è semplicemente l'insieme delle sezioni globali  $F(X)$ . Infatti, una 0-cocatena  $(s_i)$  è un 0-cociclo se e solo se  $\delta^0(s_i) = 0$ , ovvero  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  per ogni  $i, j$ , che è esattamente la condizione di compatibilità per l'incollamento. Per l'assioma del fascio, esiste allora un'unica sezione globale  $s \in F(X)$  che estende tutte le  $s_i$ . Non ci sono 0-cobordi non banali (non c'è  $C^{-1}$ ), quindi  $H^0(X, F) = Z^0(X, F) = F(X)$ .

Semanticamente,  $H^0(X, F)$  contiene le interpretazioni globalmente coerenti, quelle che valgono uniformemente su tutto lo spazio contestuale (modulo specializzazioni locali coerenti).

##### $H^1(X, F)$ : Ostruzioni all'Incollamento

Il gruppo  $H^1(X, F)$  misura l'ostruzione all'esistenza di sezioni globali. Un elemento non banale di  $H^1$  rappresenta una famiglia di sezioni locali che sono localmente coerenti (formano un cociclo) ma che non possono essere incollate in una sezione globale.

Più precisamente, un 1-cociclo  $(t_{ij}) \in Z^1(U, F)$  rappresenta "discrepanze tra interpretazioni locali" sulle sovrapposizioni  $U_i \cap U_j$ . Se questo cociclo è un cobordo, ovvero  $t_{ij} = s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}$  per qualche famiglia  $(s_i)$ , allora le discrepanze sono "spiegabili" come differenze di scelta di normalizzazione delle sezioni locali, e possono essere eliminate aggiustando le  $s_i$ . Ma se il cociclo non è un cobordo, rappresenta un'ostruzione genuina che non può essere rimossa.

Semanticamente, elementi non banali di  $H^1(X, F_{\text{parola}})$  per il fascio di una parola polisemica  $F_{\text{parola}}$  rappresentano ambiguità irrisolvibili: situazioni dove interpretazioni locali compatibili a coppie non possono essere unificate globalmente. Consideriamo "banco" con ricoprimento  $\{U_{\text{banca}}, U_{\text{scuola}}, U_{\text{mercato}}\}$ . Le interpretazioni locali  $\sigma_{\text{banca}}, \sigma_{\text{scuola}}, \sigma_{\text{mercato}}$  formano una 0-cocatena. Il loro cobordo  $(\delta^0 \sigma)_{ij}$  misura le discrepanze sulle sovrapposizioni. Se tutte le sovrapposizioni  $U_i \cap U_j$  sono vuote o se le restrizioni coincidono,  $\delta^0 \sigma = 0$  e le interpretazioni sono compatibili, quindi incollabili. Ma se  $U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}} \neq \emptyset$  e  $\sigma_{\text{banca}}|_{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}} \neq \sigma_{\text{scuola}}|_{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}}$ , allora  $\delta^0 \sigma \neq 0$ , il che genera un elemento non banale in  $H^1$  che misura l'ambiguità.

##### $H^2(X, F)$ : Ostruzioni di Ordine Superiore

I gruppi di coomologia  $H^n$  per  $n \geq 2$  misurano ostruzioni di ordine superiore, "ostruzioni alle ostruzioni". Un 2-cociclo rappresenta una configurazione di dati sulle triple intersezioni  $U_i \cap U_j \cap U_k$  che soddisfa la condizione di cociclo  $\delta^2 z = 0$  sulle quadruple intersezioni. Se

non è un 2-cobordo, rappresenta un fenomeno che non si riduce a ostruzioni di ordine inferiore.

Semanticamente,  $H^2$  potrebbe rilevare meta-ambiguità o ambiguità strutturate gerarchicamente. Per esempio, consideriamo un testo letterario dove c'è ambiguità se l'autore intende essere ironico o letterale (prima ostruzione, misurata da  $H^1$ ), e inoltre c'è ambiguità se l'autore intende che questa ambiguità sia risolvibile o deliberatamente irrisolvibile (meta-ambiguità, potenzialmente misurata da  $H^2$ ). La teoria coomologica fornisce in linea di principio strumenti per distinguere livelli di ambiguità nidificati.

In pratica, per molti spazi topologici "ragionevoli" (per esempio, spazi contrattibili, varietà differenziabili), si ha  $H^n(X, F) = 0$  per  $n \geq 2$  quando  $F$  è un fascio di gruppi abeliani. Questo è il contenuto del teorema di acyclicità di Leray. Quindi in molti casi semantici concreti,  $H^2$  e superiori saranno banali, e tutta l'informazione rilevante è catturata da  $H^0$  (sezioni globali) e  $H^1$  (ostruzioni all'incollamento).

### 8.5.5 Sequenze Esatte Lunghe in Coomologia: Calcoli e Applicazioni

Uno degli strumenti più potenti della teoria coomologica è la sequenza esatta lunga associata a una sequenza esatta corta di fasci. Questo strumento permette di calcolare gruppi di coomologia complessi riducendoli a gruppi più semplici.

Supponiamo di avere una sequenza esatta corta di fasci:

$$0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$$

Questo significa che per ogni aperto  $U$ , la sequenza di insiemi (o gruppi):

$$0 \rightarrow F(U) \rightarrow G(U) \rightarrow H(U) \rightarrow 0$$

è esatta, ovvero il morfismo  $F(U) \rightarrow G(U)$  è iniettivo, il morfismo  $G(U) \rightarrow H(U)$  è surgettivo, e l'immagine del primo è il nucleo del secondo.

Da questa sequenza esatta corta, si induce una sequenza esatta lunga in coomologia:

$$0 \rightarrow H^0(X, F) \rightarrow H^0(X, G) \rightarrow H^0(X, H) \xrightarrow{\delta} H^1(X, F) \rightarrow H^1(X, G) \rightarrow H^1(X, H) \xrightarrow{\delta} H^2(X, F) \rightarrow \dots$$

dove le frecce  $\delta$  sono morfismi di connessione che "innalzano il grado" della coomologia.

La esattezza della sequenza significa che l'immagine di ogni morfismo coincide con il nucleo del successivo. Questo fornisce relazioni precise tra i gruppi di coomologia dei tre fasci  $F$ ,  $G$ ,  $H$ , permettendo di calcolare coomologie ignote a partire da coomologie note.

### Applicazione Semantica: Raffinamento Interpretativo

Consideriamo una situazione semantica dove abbiamo tre livelli di interpretazione:

- $F$  = interpretazioni "scheletriche" o "sottodeterminate", che catturano solo aspetti nucleari del significato

- $G$  = interpretazioni "complete" o "completamente specificate", che includono tutti i dettagli contestuali
- $H$  = "dettagli contestuali" da aggiungere, il "delta" tra interpretazioni scheletriche e complete

La sequenza esatta  $0 \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 0$  codifica l'idea che interpretazioni complete si ottengono aggiungendo dettagli a interpretazioni scheletriche.

La sequenza esatta lunga ci dice:

$H^0(X, G) \rightarrow H^0(X, H)$ : le sezioni globali di interpretazioni complete mappano a sezioni globali di dettagli contestuali. Se questa mappa è surgettiva, ogni configurazione globale di dettagli contestuali può essere "riempita" da un'interpretazione completa globale.

$H^0(X, H) \xrightarrow{\delta} H^1(X, F)$ : questo è il morfismo di connessione. Se  $\delta([h]) \neq 0$  per qualche sezione globale  $h \in H^0(X, H)$ , allora aggiungere questi dettagli  $h$  a interpretazioni scheletriche crea un'ostruzione in  $H^1(X, F)$ , ovvero ambiguità a livello scheletrico che non erano evidenti prima di aggiungere i dettagli.

$H^1(X, F) \rightarrow H^1(X, G)$ : ostruzioni a livello scheletrico si "propagano" a ostruzioni a livello completo. Se c'è un'ambiguità irrisolvibile nelle interpretazioni scheletriche, questa persiste (o si trasforma) nelle interpretazioni complete.

$H^1(X, G) \rightarrow H^1(X, H)$ : alcune ostruzioni a livello completo potrebbero essere "spiegabili" come provenire dal livello dei dettagli. Se questa mappa è surgettiva, ogni ostruzione a livello di dettagli "solleva" a un'ostruzione completa.

$H^1(X, H) \xrightarrow{\delta} H^2(X, F)$ : ostruzioni di primo ordine nei dettagli possono indurre ostruzioni di secondo ordine nel livello scheletrico.

Questa struttura permette un'analisi stratificata della complessità semantica: possiamo scomporre il problema di comprendere l'ambiguità e la sottodeterminazione a livello completo in contributi provenienti da livelli più semplici, usando la sequenza esatta lunga come strumento computazionale e concettuale.

## Capitolo 9: Applicazioni Analitiche Avanzate e Casi di Studio Approfonditi

Dopo aver sviluppato la teoria matematica in modo sistematico e rigoroso, dedichiamo ora un capitolo esteso ad applicazioni analitiche concrete, dove usiamo gli strumenti della teoria dei fasci per illuminare fenomeni linguistici specifici, testando l'adeguatezza empirica e l'utilità esplicativa del framework proposto.

### 9.1 Polisemia Sistemica e Transfer Metonimico: Il Caso "cominciare"

Analizziamo il verbo italiano "cominciare" e i suoi equivalenti in altre lingue (inglese "to begin", francese "commencer"), che presentano un pattern sistematico di polisemia tra letture di eventi (cominciare un'azione) e letture di entità (cominciare un libro, inteso come "cominciare a leggere un libro").

### Costruzione dello Spazio Contestuale

Definiamo componenti rilevanti:

- $X_{syn}$ : spazio delle strutture sintattiche, con due regioni principali:  $U_{verbale}$  (complementi verbali tipo "cominciare a leggere") e  $U_{nominale}$  (complementi nominali tipo "cominciare il libro")
- $X_{asp}$ : spazio aspettuale, con distinzione tra contesti eventivi (che enfatizzano processi, azioni) e contesti stativi/resultativi
- $X_{cult}$ : componente enciclopedica che include conoscenze su azioni tipiche associate a entità (libri  $\rightarrow$  leggere, pasti  $\rightarrow$  mangiare, progetti  $\rightarrow$  lavorare su)

Lo spazio contestuale è  $X = X_{syn} \times X_{asp} \times X_{cult} \times \dots$  (altre componenti).

### Definizione del Fascio $F_{cominciare}$

Su  $U_{verbale}$ :  $F_{cominciare}(U_{verbale})$  contiene interpretazioni dove "cominciare" denota l'inizio di un'azione esplicitamente espressa dal complemento verbale.  $\sigma_{verbale}(c)(P)(x) = \text{"l'agente } x \text{ inizia a essere impegnato in un processo di tipo } P \text{ al tempo specificato in } c\text{"}$ , dove  $P$  è il tipo di processo denotato dal complemento verbale.

Su  $U_{nominale}$ :  $F_{cominciare}(U_{nominale})$  contiene interpretazioni dove "cominciare" denota l'inizio di un'azione stereotipicamente associata all'entità nominale menzionata.  $\sigma_{nominale}(c)(x)(y) = \text{"l'agente } x \text{ inizia a essere impegnato nell'azione } telic\_action(y, c) \text{ associata all'entità } y \text{ secondo le conoscenze enciclopediche in } c\text{"}$ .

La funzione  $telic\_action$ :  $Entità \times Contesti \rightarrow Azioni$  estrae l'azione telica stereotipica:  $telic\_action(libro, c) = \text{leggere}$ ,  $telic\_action(pasto, c) = \text{mangiare}$ ,  $telic\_action(progetto, c) = \text{lavorare\_su}$ , ecc.

### Mappe di Restrizione e Coercement Semantico

La transizione da interpretazione nominale a verbale (o viceversa) è modellata attraverso mappe di restrizione che implementano coercion types (forzatura di tipo). Quando restringiamo da un contesto dove entrambe le strutture sintattiche sono potenzialmente ammissibili a un contesto più specifico:

$\rho_{\{U_{nominale} \cup U_{verbale}, U_{nominale}\}}$ : specializza forzando interpretazione nominale con recupero dell'azione implicita.

Questo è un caso di metonimia sistematica (relazione parte-tutto tra entità e azioni ad esse associate) piuttosto che polisemia arbitraria. Il fascio cattura questa sistematicità attraverso la funzione  $telic\_action$  che è parte della struttura del fascio, non specificata ad hoc per ogni item lessicale ma disponibile come principio compositivo generale.

## Ostruzioni Coomologiche: Quando il Transfer Metonimico Fallisce

Considerando contesti dove un nominale non ha azione telica ovvia o ha molteplici azioni telicamente associate:

- "Cominciare il computer": usare? programmare? riparare? La molteplicità di azioni telicamente associate genera ambiguità che si manifesta come elemento non banale di  $H^1$ : non possiamo incollare interpretazioni locali univoche perché diverse specializzazioni contestuali scelgono azioni telicate diverse.

Consideriamo il ricoprimento  $\{U_{\text{uso}}, U_{\text{riparazione}}, U_{\text{programmazione}}\}$  dove ciascun  $U$  specifica un tipo di contesto relativo ai computer. Le sezioni locali sono:

- $s_{\text{uso}} \in F_{\text{cominciare}}(U_{\text{uso}})$ : "cominciare a usare il computer"
- $s_{\text{riparazione}} \in F_{\text{cominciare}}(U_{\text{riparazione}})$ : "cominciare a riparare il computer"
- $s_{\text{programmazione}} \in F_{\text{cominciare}}(U_{\text{programmazione}})$ : "cominciare a programmare sul computer"

Sulle sovrapposizioni  $U_{\text{uso}} \cap U_{\text{riparazione}}$  (contesti che riguardano sia uso sia riparazione, per esempio tutorial su come riparare da utente), le interpretazioni potrebbero divergere: quale azione è telica? Il cobordo  $\delta^0(s)$  è non zero, generando un cociclo non banale che contribuisce a  $H^1(X, F_{\text{cominciare}})$ , misurando l'ambiguità della costruzione metonimica.

## 9.2 Quantificazione e Restrizione di Dominio: "ogni" e Aperti Contestuali

Analizziamo in profondità come i quantificatori universali come "ogni" operano su domini contestualmente ristretti, e come questa restrizione può essere modellata topologicamente attraverso fasci.

### Struttura dello Spazio dei Domini

Definiamo uno spazio  $X_{\text{dom}}$  i cui punti sono domini di quantificazione possibili (insiemi di entità che potrebbero essere quantificate). La topologia su  $X_{\text{dom}}$  riflette relazioni di inclusione:  $D_1$  è vicino a  $D_2$  se  $D_1 \subseteq D_2$  o viceversa, ovvero se uno è una specializzazione o generalizzazione dell'altro.

Un aperto  $U \subseteq X_{\text{dom}}$  rappresenta una "famiglia coerente di domini", tipicamente chiusa per estensione: se  $D \in U$  e  $D \subseteq D'$ , allora  $D' \in U$ . Questa chiusura per estensione riflette il principio che se un dominio  $D$  è contestualmente saliente, allora anche qualunque sovrainsieme  $D'$  che include entità aggiuntive è ammissibile come possibile dominio (sebbene forse meno saliente).

### Fascio del Quantificatore "ogni"

$F_{\text{ogni}}(U)$  assegna a ogni famiglia di domini  $U$  un operatore quantificazionale:

$F_{\text{ogni}}(U) = \{\text{funzioni } Q_U \text{ che prendono un dominio } D \in U, \text{ un predicato restrittivo } P, \text{ un predicato nucleare } \phi, \text{ e restituiscono un valore di verità}\}$

Formalmente:  $Q_U(D, P, \varphi) = \top \Leftrightarrow \forall x \in D [P(x) \rightarrow \varphi(x)]$

Ma con sensibilità contestuale: il dominio  $D$  non è fisso ma varia con il contesto  $c$ , e è selezionato dalla famiglia  $U$ .

### Mappe di Restrizione e Specializzazione di Dominio

Quando restringiamo da una famiglia ampia  $U$  a una famiglia più specifica  $V \subseteq U$ , i domini tendono a specializzarsi, diventare più piccoli, più specifici:

$$\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{ogni}}(U) \rightarrow F_{\text{ogni}}(V)$$

opera restringendo il range dei domini ammissibili. Se  $U$  permette domini generali (tutti gli oggetti fisici), mentre  $V \subseteq U$  permette solo domini ristretti (oggetti nella stanza corrente), allora  $\rho_{\{U,V\}}$  mappa operatori generali a operatori ristretti.

### Caso di Studio: "Ogni studente ha consegnato l'elaborato"

Pronunciato in diversi contesti:

- $c_1$ : Discussione generale sull'università  $\rightarrow$  dominio  $D(c_1) =$  tutti gli studenti dell'università
- $c_2$ : Riunione di un corso specifico  $\rightarrow$  dominio  $D(c_2) =$  studenti iscritti a quel corso
- $c_3$ : Conversazione tra due studenti del corso  $\rightarrow$  dominio  $D(c_3) =$  forse ancora più ristretto, forse solo studenti del loro gruppo di lavoro

Questi contesti definiscono aperti  $U_1 \supseteq U_2 \supseteq U_3$  in ordine decrescente di ampiezza. Le sezioni del fascio:

$s_1 \in F_{\text{ogni}}(U_1)$ : quantificazione su tutto l'universo studentesco  $s_2 = s_1|_{\{U_2\}} \in F_{\text{ogni}}(U_2)$ : *restrizione al corso specifico*  $s_3 = s_2|_{\{U_3\}} \in F_{\text{ogni}}(U_3)$ : ulteriore restrizione al gruppo

La coerenza delle restrizioni ( $\rho_{\{U_2,U_3\}} \circ \rho_{\{U_1,U_2\}} = \rho_{\{U_1,U_3\}}$ ) garantisce che specializzare progressivamente il dominio sia transitivo: non importa se restringiamo prima al corso e poi al gruppo, o direttamente al gruppo.

### Interazione con Modali e Scope Ambiguities

Quando "ogni" interagisce con operatori modali, emergono ambiguità di scope classiche:

"Ogni studente deve leggere un libro"

Lettura 1 (ogni > deve): Per ogni studente  $x$ , è obbligatorio che  $x$  legga qualche libro  
Lettura 2 (deve > ogni): È obbligatorio che per ogni studente  $x$ ,  $x$  legga qualche libro

Queste differenze di scope possono essere modellate attraverso diverse strategie di restrizione del fascio. Nella Lettura 1, il quantificatore "ogni" opera prima del modale, quindi il fascio  $F_{\text{ogni}}$  è valutato su un livello contestuale "più esterno" rispetto al fascio modale  $F_{\text{deve}}$ . Nella Lettura 2, l'ordine è invertito.

Formalizziamo questo attraverso composizione di fasci. Definito:



- $F_{\text{ogni}}$ : fascio del quantificatore universale
- $F_{\text{deve}}$ : fascio dell'operatore modale deontico
- $F_{\text{un\_libro}}$ : fascio dell'indefinito

Le due letture corrispondono a due diversi morfismi compositivi:

Lettura 1:  $[[\text{ogni studente}]]([\text{deve}]]([\text{leggere}]]([\text{un libro}])))$  Lettura 2:  $[[\text{deve}]]([\text{ogni studente}]]([\text{leggere}]]([\text{un libro}])))$

Dove le doppie parentesi denotano interpretazione come morfismi tra fasci, e l'ordine di composizione determina quale operatore "cattura" prima l'altro nello scope.

La teoria dei fasci illumina perché certi ordini di scope sono preferiti: hanno strutture di restrizione più naturali, più economiche cognitive, più frequenti statisticamente nei corpora. Le mappe di restrizione per un ordine potrebbero essere più "liscie", più continue topologicamente, mentre per l'altro ordine potrebbero richiedere "salti" discontinui nello spazio contestuale.

### 9.3 Presupposizioni e Proiezione: Sotto-fasci Rigidi e Invarianza

Le presupposizioni sono notoriamente "robuste" rispetto a molte operazioni sintattiche e semantiche: si "proiettano" attraverso negazione, interrogazione, modalità, emergendo intatte a livello della frase completa anche quando il loro trigger linguistico è embedded in posizioni sintattiche subordinate. Questo comportamento può essere elegantemente modellato attraverso la nozione di sotto-fascio rigido.

#### Sotto-Fasci e Morfismi Iniettivi

Un sotto-fascio  $F'$  di un fascio  $F$  è dato da un morfismo iniettivo  $\iota: F' \rightarrow F$  tale che per ogni aperto  $U$ ,  $\iota_U: F'(U) \rightarrow F(U)$  è iniettivo. Intuitivamente,  $F'$  è una "parte" di  $F$ , un sottosistema che vive all'interno di  $F$  mantenendo la propria identità.

Un sotto-fascio  $F' \subseteq F$  si dice rigido (o invariante) rispetto a una famiglia di trasformazioni contestuali  $\{\tau_i: X \rightarrow X\}$  se per ogni trasformazione  $\tau_i$  e ogni sezione  $s' \in F'(U)$ , la sezione trasformata  $\tau_i^*(s')$  (il pullback di  $s'$  lungo  $\tau_i$ ) appartiene ancora a  $F'(\tau_i^{-1}(U))$ , ovvero rimane nel sotto-fascio.

#### Presupposizioni come Sezioni di Sotto-Fasci Rigidi

Definiamo  $F_{\text{presup}}$  come sotto-fascio di  $F_{\text{sem}}$  (il fascio completo dei significati) che contiene solo le componenti presupposizionali del significato. Per una frase come "Il re di Francia è calvo", il fascio completo  $F_{\text{frase}}$  contiene:

- Asserzione: "l'individuo denotato da 'il re di Francia' ha la proprietà di essere calvo"
- Presupposizione: "esiste un unico re di Francia"

Il sotto-fascio  $F_{\text{presup}} \subseteq F_{\text{frase}}$  contiene solo la componente presupposizionale.

Consideriamo ora trasformazioni contestuali indotte da operatori come negazione. La negazione  $\tau_{\text{neg}}: X \rightarrow X$  trasforma un contesto  $c$  in un contesto  $c_{\text{neg}}$  dove la polarità è

invertita. Formalmente, se  $c = (c_{\text{ling}}, c_{\text{sit}}, c_{\text{soc}}, \dots, c_{\text{pol}})$  dove  $c_{\text{pol}}$  è la componente di polarità assertiva/negativa, allora  $\tau_{\text{neg}}(c) = (c_{\text{ling}}, c_{\text{sit}}, c_{\text{soc}}, \dots, \neg c_{\text{pol}})$ .

La proiezione delle presupposizioni attraverso negazione corrisponde al fatto che il sotto-fascio  $F_{\text{presup}}$  è rigido rispetto a  $\tau_{\text{neg}}$ : se  $p$  è una presupposizione in  $c$  ( $p \in F_{\text{presup}}(U)$  con  $c \in U$ ), allora  $p$  rimane presupposizione anche in  $\tau_{\text{neg}}(c)$ . La trasformazione  $\tau_{\text{neg}}$  non "tocca" le sezioni nel sotto-fascio presupposizionale.

Formalmente:  $\tau_{\text{neg}}^*(F_{\text{presup}}) = F_{\text{presup}}$ , dove  $\tau_{\text{neg}}^*$  è il pullback. Questa equazione esprime che il pullback del fascio presupposizionale è isomorfo al fascio presupposizionale stesso, ovvero le presupposizioni sono invarianti sotto negazione.

### Test della Proiezione: Famiglia di Operatori

Possiamo testare sistematicamente quali operatori preservano presupposizioni definendo una famiglia di trasformazioni:

- $\tau_{\text{neg}}$ : negazione
- $\tau_{\text{interr}}$ : interrogazione (trasforma asserzioni in domande)
- $\tau_{\text{mod\_poss}}$ : modalità epistemica possibilità
- $\tau_{\text{mod\_nec}}$ : modalità epistemica necessità
- $\tau_{\text{cond}}$ : condizionalizzazione (embeddare in antecedente di condizionale)

Per ciascuna trasformazione  $\tau$ , verifichiamo se  $\tau^*(F_{\text{presup}}) \cong F_{\text{presup}}$ . *Empiricamente, le presupposizioni si proiettano attraverso tutte queste trasformazioni (il "problema della proiezione" classico), quindi dovremmo avere  $\tau_i^*(F_{\text{presup}}) \cong F_{\text{presup}}$  per ogni  $i$ .*

Questo comportamento uniforme suggerisce che  $F_{\text{presup}}$  ha una proprietà strutturale speciale: è un sotto-fascio estremamente rigido, quasi "locale costante" nel senso che le sue sezioni non variano (o variano minimamente) sotto molte trasformazioni contestuali che influenzano drammaticamente il fascio semantico complessivo.

### Accomodazione Presupposizionale come Sheafification

Quando una presupposizione non è già nel common ground contestuale, gli ascoltatori spesso "accomodano" la presupposizione, ovvero aggiornano il contesto per renderla vera. Questo processo può essere modellato come una operazione di sheafification locale.

Supponiamo che il fascio presupposizionale  $F_{\text{presup}}$  non soddisfi la condizione di fascio su un certo ricoprimento  $U = \{U_i\}$ : ci sono presupposizioni locali  $p_i \in F_{\text{presup}}(U_i)$  che non sono compatibili sulle sovrapposizioni ( $p_i|_{U_i \cap U_j} \neq p_j|_{U_i \cap U_j}$ ). Questo rappresenta situazioni dove diversi partecipanti alla comunicazione hanno assunzioni presupposizionali divergenti.

L'accomodazione corrisponde a applicare la sheafification  $F_{\text{presup}}^+$ , producendo un fascio dove le presupposizioni incompatibili sono "risolte" localmente in modo coerente. Il fascio associato  $F_{\text{presup}}^+$  contiene germi di presupposizioni che sono le risoluzioni locali delle incompatibilità.

In pratica, ciò potrebbe corrispondere a negoziazioni implicite: quando un parlante introduce una presupposizione  $p$  che l'ascoltatore non condivide, o l'ascoltatore accomoda  $p$  (aggiorna il proprio stato epistemico per includere  $p$ ), o segnala l'incompatibilità ("Aspetta, non sapevo che ci fosse un re di Francia"), forzando rinegoziazione esplicita.

## 9.4 Anafora e Accessibilità: Topologia dell Struttore Discorsive

Le relazioni anaforiche tra espressioni (pronomi che riferiscono ad antecedenti, ellissi che recuperano materiale linguistico precedente, nomi definiti che presuppongono referenti introdotti) sono governate da vincoli di accessibilità complessi. Alcuni antecedenti sono accessibili per risoluzione anaforica, altri no, e questi pattern di accessibilità hanno struttura topologica.

### Spazio Discorsivo Stratificato e Topologia dell'Accessibilità

Modelliamo un discorso come sequenza di stati discorsivi  $D_0, D_1, D_2, \dots, D_n$ , dove  $D_i$  rappresenta lo stato del discorso dopo la  $i$ -esima unità discorsiva (frase, clausola). Ciascuno  $D_i$  è un punto nello spazio discorsivo  $X_{disc}$ . La topologia su  $X_{disc}$  è indotta dalla relazione di accessibilità anaforica  $A \subseteq X_{disc} \times X_{disc}$ , dove  $D_i A D_j$  significa "referenti introdotti in  $D_i$  sono accessibili per anafora in  $D_j$ ".

Questa relazione  $A$  ha proprietà specifiche:

- Riflessiva:  $D_i A D_i$  (referenti introdotti sono immediatamente accessibili)
- Tipicamente transitiva: se  $D_i A D_j$  e  $D_j A D_k$ , allora  $D_i A D_k$  (accessibilità si propaga)
- Antisimmetrica rispetto all'ordine temporale: se  $i < j$  e  $D_i A D_j$ , generalmente non  $D_j A D_i$  (non si può riferire anaforicamente a referenti futuri, salvo catafora)

La topologia alessandrina generata da  $A$  ha come intorni:  $U_{\{D_i\}} = \{D_j : D_i A D_j\}$ , ovvero tutti gli stati discorsivi dove referenti da  $D_i$  sono accessibili.

### Isole Anaforiche come Complementi di Aperti Accessibili

Certi contesti sintattici formano "isole anaforiche", barriere che limitano l'accessibilità. Per esempio, referenti introdotti in clausole relative restrittive, interrogative embedded, o certi aggiunti temporali possono avere accessibilità limitata all'esterno dell'isola.

Formalizziamo questo: un'isola anaforica  $I$  è un sottoinsieme chiuso di  $X_{disc}$  (complemento di un aperto) tale che referenti introdotti in  $D_i \in I$  sono accessibili solo in  $D_j \in U_{\{D_i\}} \cap I$ , ovvero l'accessibilità è confinata all'isola.

Consideriamo esempio concreto: "Giovanni<sub>i</sub> ha detto che Maria<sub>j</sub> è partita. Lei<sub>?</sub> si è dispiaciuta."

Possibili antecedenti per "lei": Giovanni (nome maschile, incompatibile per genere), Maria (nome femminile, compatibile per genere). Ma Maria è stata introdotta nella clausola embedded "che Maria è partita", che potrebbe costituire un'isola parziale per certi tipi di anafora.

Modelliamo con stati:

- $D_1$ : stato dopo "Giovanni ha detto"
- $D_2$ : stato dopo clausola embedded "che Maria è partita"
- $D_3$ : stato dopo "Lei si è dispiaciuta"

Accessibilità:  $D_1 \text{ A } D_3$  (Giovanni accessibile), ma  $D_2 \text{ A } D_3$  potrebbe essere bloccato o attenuato se la clausola embedded forma isola. Se  $D_2 \notin U_{\text{acc}}$  dove  $U_{\text{acc}}$  è l'aperto di stati accessibili per anafora diretta da  $D_3$ , allora Maria non è accessibile come antecedente per "lei", forzando risoluzione a un referente extra-discorsivo o a Giovanni (nonostante la discordanza di genere possa rendere questa risoluzione difficile).

### Fasci di Referenti Discorsivi: DRS come Fasci

Discourse Representation Theory (DRT) di Kamp rappresenta discorsi attraverso Discourse Representation Structures (DRS) che sono strutture formali contenenti referenti discorsivi e condizioni su di essi. Possiamo reinterpretare DRS come sezioni di un fascio  $F_{\text{DRS}}$  su  $X_{\text{disc}}$ .

Per ogni stato discorsivo  $D$  (un punto in  $X_{\text{disc}}$ ),  $F_{\text{DRS}}(\{D\})$  contiene tutte le DRS possibili a quello stato, ovvero tutte le configurazioni di referenti discorsivi e condizioni su di essi che sono state introdotte/accumulate fino a  $D$ .

Per un aperto  $U \subseteq X_{\text{disc}}$  (una regione di stati discorsivi),  $F_{\text{DRS}}(U)$  contiene DRS che si applicano uniformemente a tutti gli stati in  $U$ , possibilmente con variazioni locali coerenti.

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{DRS}}(U) \rightarrow F_{\text{DRS}}(V)$  per  $V \subseteq U$  modellano come le DRS si ereditano/specializzano quando passiamo a regioni più piccole del discorso. Tipicamente, progredendo nel discorso (passando da  $D_i$  a  $D_j$  con  $i < j$ ), le DRS si arricchiscono: nuovi referenti vengono aggiunti, nuove condizioni vengono asserite, la struttura informazionale si complica.

Formalmente:  $\rho_{\{U_i, U_j\}}(DRS_i) = DRS_j$  dove  $DRS_j$  estende  $DRS_i$  con nuovi referenti e condizioni, preservando tutti i referenti e condizioni di  $DRS_i$  (modulo vincoli di accessibilità e aggiornamenti dinamici).

### Anafora Pronominale come Morfismo tra Fasci

La risoluzione anaforica può essere vista come morfismo  $\pi: F_{\text{pron}} \rightarrow F_{\text{DRS}}$  che mappa il fascio dei pronomi al fascio delle DRS, assegnando a ogni pronome in ogni contesto il suo antecedente appropriato (un referente discorsivo nella DRS contestuale).

Per ogni stato discorsivo  $D$  e pronome  $p$  usato in  $D$ ,  $\pi_D(p)$  seleziona un referente discorsivo  $x \in DRS(D)$  che funge da antecedente per  $p$ . Questa selezione rispetta vincoli di:

- Accordo morfologico: genere e numero di  $p$  devono concordare con proprietà di  $x$
- Accessibilità topologica:  $x$  deve essere introdotto in uno stato  $D'$  tale che  $D' \text{ A } D$  ( $D'$  è nell'intorno accessibile di  $D$ )
- Salienza pragmatica: tra referenti accessibili compatibili,  $x$  è quello più saliente (misurabile attraverso ordine di menzione recente, topicalità, prominenza sintattica)

Il morfismo  $\pi$  è compatibile con restrizioni: se restringiamo il discorso a una sotto-regione  $V$  (per esempio, analizzando solo un paragrafo specifico), la risoluzione anaforica si comporta coerentemente:

$$\rho^{\{DRS\}}\{U, V\} \circ \pi_U = \pi_V \circ \rho^{\{pron\}}\{U, V\}$$

Questa commutatività garantisce che risolvere anafora e poi specializzare al sotto-discorso dà lo stesso risultato che specializzare e poi risolvere.

## 9.5 Implicature Conversazionali e Fascio delle Massime Griceane

### 9.5.1 Struttura del Fascio delle Implicature: Costruzione Sistemática

Le implicature conversazionali, come teorizzate da Herbert Paul Grice nella sua opera fondamentale sulla logica della conversazione, rappresentano uno dei fenomeni pragmatici più studiati e al contempo più sfuggenti della semantica. Le implicature sono inferenze che gli ascoltatori derivano da enunciati non in virtù del loro contenuto semantico esplicito ma attraverso il ragionamento pragmatico basato sull'assunzione che il parlante stia seguendo il Principio di Cooperazione e le massime conversazionali che ne derivano. Queste massime, articolate nelle categorie di Quantità (fornire informazione sufficiente ma non eccessiva), Qualità (dire il vero, fornire informazione adeguatamente supportata), Relazione o Rilevanza (essere pertinenti), e Modo (essere chiari, ordinati, evitare ambiguità e oscurità), costituiscono norme pragmatiche implicite che governano la comunicazione cooperativa.

La dipendenza contestuale delle implicature è profonda e multifacetica. La stessa sequenza fonetica, la stessa forma sintattica, lo stesso contenuto semantico esplicito può generare implicature radicalmente diverse, o non generarne affatto, a seconda di una costellazione complessa di fattori contestuali che includono gli scopi conversazionali condivisi, la conoscenza comune dei partecipanti, le aspettative sulle norme sociali di comunicazione, il genere discorsivo in cui l'enunciato si colloca, e persino sottili sfumature prosodiche e paralinguistiche che modulano l'interpretazione pragmatica.

Modelliamo questo fenomeno costruendo un fascio  $F_{\text{implic}}$  che assegna a ogni regione contestuale  $U \subseteq X$  l'insieme delle possibili configurazioni di implicature che un enunciato può generare quando prodotto in contesti appartenenti a  $U$ . Più precisamente, per un enunciato  $E$  fissato, definiamo:

$F_{\text{implic}}^E(U) = \{\text{funzioni } \text{imp}: U \rightarrow P(\text{Prop}) \text{ tali che per ogni } c \in U, \text{imp}(c) \text{ è l'insieme delle proposizioni implicate conversazionalmente da } E \text{ nel contesto } c, \text{ e imp varia "continuamente" rispetto alla topologia di } U\}$

Qui  $P(\text{Prop})$  denota l'insieme potenza dell'insieme delle proposizioni, ovvero l'insieme di tutti i possibili insiemi di proposizioni implicate. La condizione di "variazione continua" cattura l'idea che contesti topologicamente vicini dovrebbero generare insiemi di implicature simili, evitando salti discontinui arbitrari nelle inferenze pragmatiche.

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U, V\}}: F_{\text{implic}}^E(U) \rightarrow F_{\text{implic}}^E(V)$  per  $V \subseteq U$  operano restringendo il dominio delle funzioni di implicatura. Se  $\text{imp} \in F_{\text{implic}}^E(U)$  specifica quali proposizioni sono implicate in ciascun contesto dell'ampia regione  $U$ , allora  $\text{imp}|_V \in$

$F_{\text{implic}}^E(V)$  è la restrizione di questa funzione alla sotto-regione  $V$ , specificando le implicature solo nei contesti più ristretti appartenenti a  $V$ .

Un aspetto cruciale della modellazione è che le implicature dipendono non solo dal contenuto esplicito dell'enunciato  $E$  ma anche dalle alternative rilevanti contestualmente, ovvero dagli enunciati alternativi che il parlante avrebbe potuto produrre ma ha scelto di non produrre. La teoria delle implicature scalari illustra questo punto in modo paradigmatico. Consideriamo la scala quantitativa  $\langle \text{tutti, la maggior parte, molti, alcuni, pochi} \rangle$  dove ogni termine è semanticamente più debole del precedente. Quando un parlante usa "alcuni" in un contesto dove tutte le alternative nella scala sono ugualmente accessibili e rilevanti, l'ascoltatore inferisce che i termini più forti della scala non sono applicabili, generando l'implicatura "non tutti" da "alcuni".

Formalizziamo questo introducendo, per ogni contesto  $c$ , un insieme  $\text{Alt}(E, c)$  di enunciati alternativi rilevanti in  $c$ . Per il nostro esempio con "alcuni", potremmo avere:

$\text{Alt}(\text{"Alcuni studenti hanno passato"}, c) = \{\text{"Tutti gli studenti hanno passato"}, \text{"La maggior parte degli studenti ha passato"}, \text{"Molti studenti hanno passato"}, \text{"Alcuni studenti hanno passato"}, \text{"Pochi studenti hanno passato"}\}$

L'insieme delle implicature  $\text{imp}(c)$  è determinato non solo da  $E$  stesso ma dalla posizione di  $E$  nella struttura ordinata  $\text{Alt}(E, c)$ . Specificamente, se  $E$  è l'elemento  $i$ -esimo in una scala ordinata per forza informativa, e il parlante ha scelto  $E$  piuttosto che elementi più forti (posizioni 1, 2, ...,  $i-1$ ), allora per la massima di Quantità l'ascoltatore inferisce che gli elementi più forti non sono appropriati, ovvero che le proposizioni corrispondenti sono false o non conosciute dal parlante.

Le mappe di restrizione contestuale  $p_{\{U,V\}}$  devono quindi tenere conto di come l'insieme delle alternative rilevanti possa variare quando specializziamo il contesto. Formalmente, se  $V \subseteq U$  e  $c \in V$ , potremmo avere  $\text{Alt}(E, c)$  valutato rispetto a  $V$  diverso da  $\text{Alt}(E, c)$  valutato rispetto a  $U$ , perché la restrizione contestuale può rendere salienti alternative che erano irrilevanti nel contesto più ampio, o viceversa può eliminare alternative che cessano di essere pertinenti nel contesto più ristretto.

Consideriamo un esempio concreto illuminante. L'enunciato  $E = \text{"Il seminario è stato interessante"}$  pronunciato da un partecipante a un collega dopo la fine dell'evento. In un contesto  $U_{\text{neutrale}}$  dove non ci sono particolari aspettative o pressioni sociali, questo enunciato genera tipicamente implicature minimali, forse l'implicatura che il seminario non è stato eccezionale o straordinario (altrimenti il parlante avrebbe usato termini più forti), ma comunque positivo. L'insieme  $\text{Alt}(E, U_{\text{neutrale}})$  potrebbe includere alternative come "Il seminario è stato straordinario", "Il seminario è stato eccellente", "Il seminario è stato interessante", "Il seminario è stato accettabile", "Il seminario è stato noioso".

Ora consideriamo una restrizione a un sottocontesto  $V_{\text{organizzatore}} \subseteq U_{\text{neutrale}}$  dove il parlante è l'organizzatore del seminario e l'ascoltatore è un collega che ha investito tempo e risorse nell'organizzazione. In questo contesto più ristretto, le dinamiche sociali cambiano drammaticamente. L'enunciato "Il seminario è stato interessante" potrebbe ora generare implicature diverse o aggiuntive. In particolare, potrebbe implicare cortesia diplomatica piuttosto che valutazione genuina, suggerendo implicitamente che il seminario non è stato

così eccellente come l'organizzatore sperava, ma il parlante sta usando un eufemismo per non offendere.

La mappa di restrizione  $p_{\{U_{\text{neutrale}}, V_{\text{organizzatore}}\}}$  prende la funzione di implicatura definita su  $U_{\text{neutrale}}$  e la modifica per  $V_{\text{organizzatore}}$ , riflettendo questo cambio pragmatico. Formalmente:

$$p_{\{U_{\text{neutrale}}, V_{\text{organizzatore}}\}}(\text{imp}_{\text{neutrale}})(c) = \text{imp}_{\text{organizzatore}}(c)$$

dove  $\text{imp}_{\text{organizzatore}}(c)$  include non solo le implicature scalari standard ma anche implicature di cortesia, eufemismo, e gestione delle facce (face management) che emergono dalla configurazione sociale specifica del contesto ristretto.

### 9.5.2 Cancellabilità delle Implicature e Fallimento della Condizione di Fascio

Una proprietà diagnostica fondamentale che distingue le implicature conversazionali dagli entailment semantici è la loro cancellabilità (defeasibility). Un'implicatura può essere esplicitamente cancellata o sospesa dal parlante aggiungendo materiale linguistico che contraddice l'inferenza implicata, senza generare incoerenza logica. Questa proprietà contrasta nettamente con gli entailment semantici, che non possono essere cancellati senza produrre contraddizione esplicita.

Consideriamo il classico esempio di implicatura scalare:

$E_1$ : "Alcuni studenti hanno passato l'esame."

Questo enunciato genera tipicamente l'implicatura conversazionale:

$IMP_1$ : "Non tutti gli studenti hanno passato l'esame"

Tuttavia, il parlante può immediatamente cancellare questa implicatura con una continuazione esplicita:

$E_1 + E_2$ : "Alcuni studenti hanno passato l'esame. Infatti, tutti hanno passato."

Questa sequenza è perfettamente coerente e accettabile. La seconda frase  $E_2$  = "Infatti, tutti hanno passato" cancella esplicitamente l'implicatura  $IMP_1$  generata dalla prima frase. Crucialmente, non c'è contraddizione logica perché "alcuni" semanticamente significa "almeno uno, possibilmente tutti", quindi è logicamente compatibile con "tutti". La contraddizione apparente nasce solo se trattiamo l'implicatura come parte del contenuto semantico, cosa che la teoria griceana nega.

Modelliamo la cancellabilità topologicamente come fallimento della condizione di incollamento del fascio. Consideriamo uno spazio contestuale decomponibile in regioni:

- $U_1$ : contesto dopo l'enunciato  $E_1$ , prima della cancellazione
- $U_2$ : contesto dopo la sequenza completa  $E_1 + E_2$ , con cancellazione esplicita
- $U_0 = U_1 \cup U_2$ : unione delle due regioni contestuali

Nel contesto  $U_1$ , l'implicatura  $IMP_1$  è attiva:  $imp_1 \in F\_implic(U_1)$  include "non tutti hanno passato" nell'insieme delle proposizioni implicate. Nel contesto  $U_2$ , dopo la cancellazione esplicita, l'implicatura  $IMP_1$  è disattivata:  $imp_2 \in F\_implic(U_2)$  non include "non tutti hanno passato".

Ora consideriamo l'intersezione  $U_1 \cap U_2$ , che potrebbe essere non vuota se rappresentiamo i contesti come regioni estese temporalmente o come famiglie di varianti contestuali. Sulla sovrapposizione, abbiamo:

$$imp_1|_{\{U_1 \cap U_2\}} \neq imp_2|_{\{U_1 \cap U_2\}}$$

Le sezioni locali sono incompatibili sulla sovrapposizione: una include l'implicatura, l'altra no. Questo è esattamente il fallimento della condizione di compatibilità richiesta per l'incollamento. Non possiamo trovare un'unica sezione globale  $s \in F\_implic(U_0)$  che estenda coerentemente sia  $imp_1$  che  $imp_2$ .

Questo fallimento dell'incollamento non è un difetto della modellazione ma cattura precisamente il fenomeno linguistico della cancellabilità: le implicature non si comportano come componenti rigide e stabili del significato che devono essere preservate attraverso espansioni contestuali. Sono piuttosto componenti flessibili, revocabili, che possono essere eliminate da chiarificazioni esplicite successive senza violare coerenza logica.

Possiamo quantificare questa instabilità coomologicamente. Considerando il ricoprimento  $\{U_1, U_2\}$  di  $U_0$ , la famiglia di sezioni locali  $\{imp_1, imp_2\}$  forma una 0-cocatena. Il suo cobordo  $\delta^0(imp_1, imp_2)$  è non zero precisamente perché le sezioni differiscono sulla sovrapposizione:

$$\delta^0(imp_1, imp_2)|_{\{U_1 \cap U_2\}} = imp_1|_{\{U_1 \cap U_2\}} - imp_2|_{\{U_1 \cap U_2\}} \neq 0$$

Se questa discrepanza non è un cobordo (non esiste una rinormalizzazione globale delle implicature che la elimini), contribuisce a un elemento non banale del primo gruppo di coomologia  $H^1(U_0, F\_implic)$ , misurando l'ostruzione all'incollamento.

Interpretativamente,  $H^1(U_0, F\_implic) \neq 0$  segnala che le implicature conversazionali non formano un sistema globalmente coerente attraverso  $U_0$ . Ci sono configurazioni di implicature localmente consistenti (ciascuna coerente nel proprio dominio contestuale) che non possono essere unificate in una configurazione globale. Questa è esattamente la natura pragmatica, contestualmente volatile, non-monòtona delle implicature conversazionali.

### 9.5.3 Interazione tra Implicature e Presupposizioni: Morfismi tra Fasci Pragmatici

Le implicature conversazionali interagiscono in modi complessi con le presupposizioni, e questa interazione può essere modellata formalmente attraverso morfismi tra il fascio delle implicature  $F\_implic$  e il fascio delle presupposizioni  $F\_presup$  che abbiamo discusso precedentemente.

Una differenza fondamentale è che le presupposizioni tendono a proiettarsi rigidamente attraverso operatori sintattici (negazione, interrogazione, modalità), mentre le implicature sono sensibili allo scopo di tali operatori e possono scomparire o trasformarsi radicalmente. Consideriamo:



Asserzione: "Giovanni ha smesso di fumare"

- Presupposizione: Giovanni fumava precedentemente
- Implicatura: (possibile) Giovanni ha smesso recentemente, per qualche ragione saliente

Negazione: "Giovanni non ha smesso di fumare"

- Presupposizione: Giovanni fumava precedentemente (proiettata!)
- Implicatura: (trasformata) Giovanni continua a fumare

La presupposizione attraversa la negazione immutata, manifestando la rigidità che abbiamo modellato come invarianza del sotto-fascio  $F_{\text{presup}}$  rispetto alla trasformazione  $\tau_{\text{neg}}$  indotta dalla negazione. L'implicatura invece cambia qualitativamente: dall'implicare cessazione recente nell'asserzione, passa a implicare continuazione nell'enunciato negato.

Definiamo un morfismo di fasci  $\varphi: F_{\text{implic}} \rightarrow F_{\text{presup}}$  che tenta di "trasformare" implicature in presupposizioni attraverso un processo di convenzionalizzazione o cristallizzazione pragmatica. Storicamente, molte presupposizioni attuali sono nate come implicature conversazionali che, attraverso ripetizione sistematica e stabilizzazione contestuale, si sono "irrigidite" diventando componenti più stabili del significato.

Il morfismo  $\varphi_U: F_{\text{implic}}(U) \rightarrow F_{\text{presup}}(U)$  per ogni aperto  $U$  mappa configurazioni di implicature a configurazioni presupposizionali, catturando quali implicature in  $U$  sono abbastanza stabili, sistematiche, e convenzionalizzate da comportarsi più come presupposizioni. Formalmente:

$$\varphi_U(\text{imp}) = \{p \in \text{imp}(c) : p \text{ è stabile sotto trasformazioni sintattiche rilevanti per tutti } c \in U\}$$

Questo morfismo non è surgettivo in generale: esistono presupposizioni che non derivano da implicature convenzionalizzate (per esempio, presupposizioni lessicali idiosincratice). Non è nemmeno iniettivo: implicature diverse possono convergere alla stessa presupposizione quando cristallizzate.

La compatibilità di  $\varphi$  con le mappe di restrizione garantisce comportamento coerente attraverso specializzazioni contestuali:

$$\rho^{\{\text{presup}\}\{U,V\}} \circ \varphi_U = \varphi_V \circ \rho^{\{\text{implic}\}\{U,V\}}$$

Questa commutatività esprime che cristallizzare implicature in presupposizioni e poi specializzare contestualmente dà lo stesso risultato che specializzare le implicature e poi cristallizzare. Il diagramma commutativo riflette la coerenza strutturale tra i due sistemi pragmatici.

#### 9.5.4 Implicature Generalizzate vs Particolarizzate: Fasci Costanti vs Variabili

Grice distingue tra implicature conversazionali generalizzate, che sorgono sistematicamente in assenza di contesto speciale, e implicature particolarizzate, che dipendono criticamente da caratteristiche idiosincratice del contesto specifico. Questa distinzione può essere

formalizzata topologicamente attraverso la distinzione tra sezioni (quasi) costanti e sezioni altamente variabili del fascio  $F_{\text{implic}}$ .

Le implicature generalizzate corrispondono a sezioni del fascio che variano minimamente attraverso ampi aperti dello spazio contestuale. Formalmente, una sezione  $\text{imp} \in F_{\text{implic}}(U)$  è (approssimativamente) costante se per ogni coppia di contesti  $c_1, c_2 \in U$  sufficientemente "vicini" nella topologia,  $\text{imp}(c_1) \approx \text{imp}(c_2)$ , ovvero gli insiemi di proposizioni implicate sono molto simili (con sovrapposizione quasi totale).

L'implicatura scalare da "alcuni" a "non tutti" è tipicamente generalizzata: in una vasta gamma di contesti informativi standard, questa inferenza emerge automaticamente, indipendentemente da dettagli contestuali specifici. Possiamo modellare questo dicendo che esiste un ampio aperto  $U_{\text{standard}}$  nello spazio contestuale (rappresentante contesti cooperativi informativi senza particolarità speciali) dove la sezione  $\text{imp\_alcuni}$  è approssimativamente costante, assegnando sistematicamente l'implicatura "non tutti" in ogni  $c \in U_{\text{standard}}$ .

Le implicature particolarizzate, al contrario, corrispondono a sezioni che variano drammaticamente anche tra contesti vicini, sensibili a sfumature sottili di configurazione contestuale. Consideriamo il classico esempio di Grice:

A: "Sono rimasto senza benzina." B: "C'è un distributore dietro l'angolo."

L'implicatura particolarizzata è che il distributore è aperto, ha benzina disponibile, ed è accessibile ad A. Questa implicatura dipende criticamente da:

- Lo scopo conversazionale (risolvere il problema di A)
- La massima di Rilevanza (la risposta di B deve essere pertinente)
- Conoscenze condivise su distributori di benzina
- Assunzioni su cooperatività di B

Se cambiamo sottilmente il contesto (per esempio, A e B sono in una discussione filosofica astratta sui veicoli, non in una situazione pratica), l'implicatura scompare completamente. La sezione  $\text{imp\_distributore}$  varia discontinuamente: in contesti pragmatici è ricca di implicature particolarizzate, in contesti teorici queste implicature sono assenti.

Topologicamente, possiamo misurare il "grado di generalizzazione" di un'implicatura attraverso la dimensione o la misura topologica dell'aperto massimale su cui l'implicatura è stabile. Implicature altamente generalizzate sono sezioni su aperti grandi, implicature particolarizzate su aperti piccoli e frammentati.

## 9.6 Quantificazione e Fasci di Domini: Restrizione Contestuale Sistematica

La quantificazione in linguaggio naturale presenta complessità semantiche profonde che la logica del primo ordine classica cattura solo parzialmente. I quantificatori come "ogni", "alcuni", "nessuno", "la maggior parte" operano non su domini universali fissi ma su domini contestualmente ristretti in modi sistematici e governati da principi pragmatici. Questa

restrizione contestuale dei domini di quantificazione può essere elegantemente modellata attraverso fasci di domini definiti su spazi contestuali.

### 9.6.1 Spazio dei Domini e Topologia dell'Inclusione

Definiamo uno spazio  $X_{\text{dom}}$  i cui punti sono domini di quantificazione, ovvero insiemi di entità che potrebbero fungere da universo su cui quantificatori operano. Formalmente,  $X_{\text{dom}} \subseteq P(\text{Entità})$ , dove  $P$  denota l'insieme potenza e Entità è l'universo massimale di tutte le entità ontologicamente ammissibili nel modello.

La topologia naturale su  $X_{\text{dom}}$  è indotta dalla relazione di inclusione insiemistica  $\subseteq$ . Definiamo un sistema di intorni dove due domini  $D_1, D_2 \in X_{\text{dom}}$  sono topologicamente vicini se uno è (quasi) sottoinsieme dell'altro, o più precisamente se la loro differenza simmetrica è piccola. Alternativamente, possiamo usare la topologia alessandrina generata dal preordine  $D_1 \leq D_2 \Leftrightarrow D_1 \subseteq D_2$ , dove gli aperti sono ideali up-closed: se  $D$  è in un aperto  $U$  e  $D \subseteq D'$ , allora  $D'$  è in  $U$ .

Questa scelta topologica cattura l'intuizione che specializzare un dominio (restringerlo) è un'operazione continua: da un dominio generale possiamo passare gradualmente a domini più ristretti attraverso restrizioni successive. Al contrario, espandere un dominio (aggiungere entità) è l'operazione duale.

Gli aperti  $U \subseteq X_{\text{dom}}$  rappresentano "famiglie coerenti di domini" chiuse per estensione. Se un dominio  $D$  appartiene a una famiglia  $U$ , allora ogni sovrainsieme  $D' \supseteq D$  che si ottiene aggiungendo entità appartiene ancora a  $U$ . Questo riflette il principio che se un dominio è contestualmente ammissibile, allora anche qualunque sua espansione (che include più entità) è ammissibile, sebbene forse meno saliente o rilevante.

### 9.6.2 Fascio del Quantificatore Universale "ogni"

Definiamo il fascio semantico  $F_{\text{ogni}}$  associato al quantificatore universale "ogni" nel modo seguente. Per ogni aperto  $U \subseteq X_{\text{dom}}$  (famiglia di domini),  $F_{\text{ogni}}(U)$  assegna operatori quantificazionali che operano su domini nella famiglia  $U$ :

$$F_{\text{ogni}}(U) = \{\text{funzioni } Q_U: U \times \text{Pred} \times \text{Pred} \rightarrow \{0, 1\}\}$$

dove  $\text{Pred}$  è l'insieme dei predicati monadici, e  $Q_U(D, P, \varphi) = 1$  (vero) se e solo se:

$$\forall x \in D [P(x) \rightarrow \varphi(x)]$$

Ovvero, "ogni  $P$  è  $\varphi$ " è vero relativamente al dominio  $D$  se e solo se tutti gli elementi di  $D$  che soddisfano il predicato restrittivo  $P$  soddisfano anche il predicato nucleare  $\varphi$ .

Crucialmente, il dominio  $D$  non è fisso globalmente ma varia contestualmente. La sezione  $Q_U$  permette questa variazione all'interno della famiglia  $U$ , specificando come l'operatore si comporta per ciascun dominio possibile in  $U$ .

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{ogni}}(U) \rightarrow F_{\text{ogni}}(V)$  per  $V \subseteq U$  (dove  $V$  è una sottofamiglia di domini) operano restringendo il range dell'operatore. Se  $Q_U$  specifica come

"ogni" quantifica su tutti i domini nella famiglia ampia  $U$ , allora  $Q_V = \rho_{\{U,V\}}(Q_U)$  specifica la quantificazione solo sui domini nella sottofamiglia più ristretta  $V$ .

Formalmente,  $\rho_{\{U,V\}}(Q_U) = Q_U|_V$ , ovvero la restrizione funzionale di  $Q_U$  al dominio  $V$ . Questa mappa di restrizione è banale (una semplice restrizione di dominio) ma diventa interessante quando consideriamo come i domini stessi cambiano attraverso la restrizione.

### 9.6.3 Restrizione Contestuale dei Domini: Un Esempio Sistemático

Consideriamo l'enunciato:

"Ogni studente ha consegnato l'elaborato."

Analizziamo come il dominio di quantificazione si restringe attraverso specializzazioni contestuali progressive.

Contesto  $U_1$  - Generale Accademico: Discussione generale sul sistema universitario, senza specificazione di istituzione o corso particolare. Il dominio  $D_1 \in U_1$  potrebbe essere:

$D_1 = \{x : x \text{ è studente in qualche università}\}$

Questo è un dominio enorme, potenzialmente includente milioni di individui. L'enunciato "Ogni studente ha consegnato l'elaborato" interpretato con questo dominio farebbe un'affermazione universale assurdamente forte e ovviamente falsa (non è vero che tutti gli studenti universitari del mondo hanno consegnato qualche elaborato).

Contesto  $U_2 \subseteq U_1$  - Università Specifica: La conversazione si svolge all'Università di Milano, o riguarda esplicitamente questa istituzione. Il dominio si restringe:

$D_2 = \{x : x \text{ è studente all'Università di Milano}\}$

La mappa di restrizione  $\rho_{\{U_1, U_2\}}$  proietta il dominio generale  $D_1$  sul dominio istituzionalmente ristretto  $D_2$ . Formalmente, se modelliamo i domini come funzioni che assegnano a ogni contesto  $c$  un insieme  $D(c)$ , allora:

$\rho_{\{U_1, U_2\}}(D_1)(c) = D_1(c) \cap \{x : x \text{ soddisfa vincoli aggiuntivi imposti da } U_2\}$

Contesto  $U_3 \subseteq U_2$  - Corso Specifico: La conversazione avviene durante una lezione o riunione del corso di Semantica Formale. Il dominio si restringe ulteriormente:

$D_3 = \{x : x \text{ è studente iscritto al corso di Semantica Formale, Università di Milano, anno corrente}\}$

Contesto  $U_4 \subseteq U_3$  - Gruppo di Lavoro: Conversazione tra membri di un gruppo di lavoro specifico all'interno del corso. Il dominio si restringe a:

$D_4 = \{x : x \text{ è membro del gruppo di lavoro numero 3, corso di Semantica Formale}\}$

Questa sequenza di inclusioni  $U_4 \subseteq U_3 \subseteq U_2 \subseteq U_1$  induce una catena di restrizioni di domini  $D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq D_4$ . Le mappe di restrizione consecutive:

$$\rho_{\{U_1, U_4\}} = \rho_{\{U_3, U_4\}} \circ \rho_{\{U_2, U_3\}} \circ \rho_{\{U_1, U_2\}}$$

soddisfano l'assioma di composizionalità del prefascio: restringere progressivamente attraverso livelli intermedi produce lo stesso risultato della restrizione diretta.

Il fascio  $F_{\text{ogni}}$  codifica come l'interpretazione del quantificatore universale si specializzi coerentemente attraverso queste restrizioni. Una sezione globale  $s \in F_{\text{ogni}}(U_1)$  che specifica quantificazione su  $D_1$  si restringe a sezioni  $s|_{\{U_2\}}$ ,  $s|_{\{U_3\}}$ ,  $s|_{\{U_4\}}$  che quantificano sui domini progressivamente più ristretti.

#### 9.6.4 Interazione tra Quantificatori e Modali: Ambiguità di Scopo come Ordine di Restrizione

Quando quantificatori interagiscono con operatori modali, emergono classiche ambiguità di scopo (scope ambiguities) che hanno impegnato semanticisti formali per decenni. La teoria dei fasci offre una prospettiva geometrica illuminante su queste ambiguità, interpretandole come differenti ordini di applicazione delle mappe di restrizione tra fasci.

Consideriamo l'enunciato:

"Ogni studente deve leggere un libro."

Questo enunciato ammette (almeno) due letture distinte:

Lettura 1 (ogni > deve > un): Per ogni studente  $x$ , è obbligatorio che  $x$  legga qualche libro (non necessariamente lo stesso per tutti).

Lettura 2 (deve > ogni > un): È obbligatorio che per ogni studente  $x$ ,  $x$  legga qualche libro.

Queste letture sembrano sottilmente diverse, e in alcuni contesti la differenza diventa significativa. La lettura 1 distribuisce l'obbligo individualmente su ciascuno studente, mentre la lettura 2 impone un obbligo unico che riguarda la totalità degli studenti.

Inoltre, c'è una terza lettura possibile (meno saliente ma grammaticalmente ammissibile):

Lettura 3 (un > deve > ogni): Esiste un libro specifico tale che è obbligatorio che ogni studente lo legga.

Modelliamo queste letture attraverso composizioni diverse di morfismi tra fasci. Abbiamo tre fasci rilevanti:

- $F_{\text{ogni}}$ : fascio del quantificatore universale
- $F_{\text{deve}}$ : fascio dell'operatore modale deontico
- $F_{\text{un}}$ : fascio del quantificatore esistenziale/indefinito

L'interpretazione compositiva dell'enunciato completo richiede di comporre questi fasci seguendo la struttura sintattica, ma l'ordine di composizione (lo "scopo relativo" degli operatori) è sottodeterminato sintatticamente, generando ambiguità.

Lettura 1 corrisponde alla composizione:

$[[\text{ogni studente}]]( [[\text{deve}]]( [[\text{leggere}]]( [[\text{un libro}]] )))$

Dove il quantificatore "ogni" ha scopo più ampio, cattura prima l'operatore modale "deve", che a sua volta ha scopo su "un libro". Topologicamente, questo significa che restringiamo prima rispetto alla variabile studentesca, poi applichiamo la modalità deontica, poi introduciamo la variabile del libro.

Lettura 2 corrisponde a:

$[[\text{deve}]]( [[\text{ogni studente}]]( [[\text{leggere}]]( [[\text{un libro}]] )))$

L'operatore modale ha scopo massimo. Topologicamente, restringiamo prima rispetto alla modalità, poi alla quantificazione universale.

Lettura 3 corrisponde a:

$[[\text{un libro}]]( \lambda y. [[\text{deve}]]( \text{ogni studente} ))$

L'indefinito ha scopo massimo (wide scope), creando una configurazione dove un libro specifico è quantificato esternamente e poi distribuito.

Formalizziamo questo più rigorosamente. Ogni operatore (quantificatore o modale) corrisponde a una trasformazione di fasci. Il quantificatore universale "ogni" può essere visto come un operatore che prende un fascio  $F$  di predicati e produce un nuovo fascio  $\forall F$  dove:

$(\forall F)(U) = \{s \in F(U \times D) : \text{per ogni individuo } x \text{ nel dominio contestuale, } s(-,x) \text{ soddisfa i vincoli}\}$

Similmente, il modale deontico "deve" trasforma fasci proposizionali:

$(\Box_{\text{deont}} F)(U) = \{s \in F(U \times W_{\text{deont}}) : \text{per ogni mondo deonticamente accessibile } w, s(-,w) \text{ è vero}\}$

L'ambiguità di scopo emerge dal fatto che possiamo applicare queste trasformazioni in ordini diversi:

$\forall(\Box(F))$  versus  $\Box(\forall(F))$

E questi producono fasci risultanti con strutture topologiche diverse, corrispondenti alle diverse interpretazioni semantiche.

Le mappe di restrizione nei fasci composti riflettono la propagazione di specializzazioni contestuali attraverso i livelli operatoriali. Se restringiamo il contesto in modo da specializzare il dominio di quantificazione, questa specializzazione si propaga attraverso la modalità nella composizione  $\forall(\Box(F))$ , ma segue un percorso diverso nella composizione  $\Box(\forall(F))$ .

### 9.6.5 Quantificatori Generalizzati e Fasci di Relazioni tra Domini

La teoria dei quantificatori generalizzati, sviluppata da Barwise, Cooper e altri nella tradizione della semantica formale, tratta i quantificatori non come operatori sintattici primitivi

ma come relazioni tra insiemi (o predicati). Un quantificatore generalizzato  $Q$  è una funzione che prende due predicati  $P$  e  $\phi$  e restituisce un valore di verità, soggetta a vincoli formali come conservatività, estensione, e persistenza.

Possiamo estendere naturalmente questo approccio a fasci. Definiamo un fascio di quantificatori generalizzati  $F\_Q$  dove per ogni aperto  $U$ :

$F\_Q(U) = \{\text{relazioni } Q\_U \subseteq P(D(U)) \times P(D(U)) \text{ che soddisfano assiomi di quantificatore generalizzato per ogni dominio } D \in U\}$

Qui  $D(U)$  denota la famiglia di domini contestualmente rilevanti in  $U$ , e  $P(D(U))$  è l'insieme potenza (insieme dei predicati monadici sul dominio).

Esempi di quantificatori generalizzati includono:

"Ogni":  $Q\_ogni(A, B) \Leftrightarrow A \subseteq B$  (il predicato restrittivo è sottoinsieme del nucleare)

"Alcuni":  $Q\_alcuni(A, B) \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$  (intersezione non vuota)

"La maggior parte":  $Q\_maggioranza(A, B) \Leftrightarrow |A \cap B| > |A \setminus B|$  (più elementi soddisfano entrambi che solo il restrittivo)

"Almeno  $n$ ":  $Q\_{\geq n}(A, B) \Leftrightarrow |A \cap B| \geq n$

"Esattamente  $n$ ":  $Q\_{=n}(A, B) \Leftrightarrow |A \cap B| = n$

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F\_Q(U) \rightarrow F\_Q(V)$  operano restringendo le relazioni ai domini in  $V$ . Se  $Q\_U$  è una relazione quantificazionale definita per tutti i domini in  $U$ , allora  $Q\_V = Q\_U|_V$  è la sua restrizione ai domini in  $V \subseteq U$ .

Un aspetto importante è che alcuni quantificatori sono monotoni (preservano relazioni di inclusione) mentre altri non lo sono. Per esempio:

"Ogni" è persistente a destra (upward monotone nel secondo argomento): se  $Q\_ogni(A, B)$  e  $B \subseteq B'$ , allora  $Q\_ogni(A, B')$ .

"Nessuno" è anti-persistente a destra (downward monotone): se  $Q\_nessuno(A, B')$  e  $B \subseteq B'$ , allora  $Q\_nessuno(A, B)$ .

"Esattamente  $n$ " è non-monotono: né persistente né anti-persistente.

Queste proprietà di monotonicità si riflettono in proprietà topologiche dei fasci corrispondenti. Quantificatori persistenti hanno sezioni che si "estendono facilmente" a aperti più grandi (upward closed), mentre quantificatori anti-persistenti hanno sezioni che si "restringono facilmente" a aperti più piccoli (downward closed). Quantificatori non-monotoni richiedono strutture di fascio più complesse senza queste proprietà di chiusura.

### 9.6.6 Proporzioni e Quantificatori Vaghi: Fasci Fuzzy e Soglie Contestuali

Quantificatori proporzionali come "la maggior parte", "molti", "pochi", "una piccola percentuale" presentano complessità aggiuntive perché la loro soddisfazione dipende non

solo da relazioni insiemistiche ma anche da soglie numeriche o proporzionali contestualmente determinate.

Per "la maggior parte", potremmo definire:

$$Q\_maggioranza(A, B) \Leftrightarrow |A \cap B| / |A| > \theta(c)$$

dove  $\theta(c)$  è una soglia contestuale che specifica quale proporzione conta come "maggioranza" nel contesto  $c$ . In contesti matematici formali,  $\theta(c) = 0,5$  (rigorosamente più del 50%). In contesti colloquiali,  $\theta(c)$  potrebbe essere più basso o più alto a seconda di aspettative pragmatiche.

Il fascio  $F\_maggioranza$  deve quindi codificare non solo il quantificatore ma anche la funzione di soglia  $\theta: U \rightarrow [0,1]$  che varia contestualmente. Per ogni aperto  $U$ :

$F\_maggioranza(U) = \{\text{coppie } (Q, \theta) \text{ dove } Q \text{ è la relazione quantificazionale e } \theta: U \rightarrow [0,1] \text{ specifica soglie per ogni } c \in U\}$

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}$  restringono sia il quantificatore che la funzione di soglia. Crucialmente, la funzione  $\theta$  potrebbe non essere costante: specializzando il contesto, la soglia può cambiare. In contesti dove precisione è richiesta (discussioni statistiche formali),  $\theta$  potrebbe aumentare verso 0,5. In contesti retorici dove esagerazioni sono tollerate,  $\theta$  potrebbe diminuire.

Quantificatori vaghi come "molti" e "pochi" sono ancora più context-sensitive. Non c'è una soglia numerica precisa che definisce "molti": dipende massicciamente dal dominio di quantificazione, dalle aspettative contestuali, dalla scala di comparazione rilevante.

"Molti studenti hanno passato l'esame" - "molti" potrebbe significare 20 su 30 in un corso universitario standard (circa 67%), ma 5 su 10 (50%) potrebbe non contare come "molti" in un contesto dove le aspettative sono alte.

Possiamo modellare quantificatori vaghi usando fasci fuzzy, dove invece di relazioni crisp  $Q \subseteq P(D) \times P(D)$ , abbiamo relazioni graduate  $Q: P(D) \times P(D) \rightarrow [0,1]$  che assegnano gradi di soddisfazione.

$$F\_molti(U) = \{\text{funzioni } Q\_molti: U \rightarrow (P(D(U)) \times P(D(U)) \rightarrow [0,1])\}$$

Per ogni contesto  $c \in U$  e predicati  $A, B$ ,  $Q\_molti(c)(A, B) \in [0,1]$  specifica il grado in cui "molti  $A$  sono  $B$ " è vero in  $c$ . Questo grado dipende da:

- La proporzione  $|A \cap B| / |A|$
- Il numero assoluto  $|A \cap B|$
- Aspettative contestuali su cosa conta come "molti" in quel dominio
- Confronti con baseline alternative (molti rispetto a cosa?)

Le mappe di restrizione per fasci fuzzy sono funzioni che preservano la struttura graduata, mappando funzioni di grado su  $U$  a funzioni di grado su  $V \subseteq U$  compatibilmente.

## 9.7 Anafora Discorsiva e Topologia dell'Accessibilità: Modelli Avanzati



Abbiamo introdotto precedentemente una modellazione base dell'anafora usando fasci di Discourse Representation Structures. Approfondiamo ora questa analisi con modelli più sofisticati che catturano fenomeni anaforici complessi come anafora plurale, e-type pronouns, donkey sentences, e vincoli di accessibilità strutturalmente determinati.

### 9.7.1 Topologia Alessandrina per Stati Discorsivi e Relazione di Accessibilità

Modelliamo uno spazio discorsivo  $X_{\text{disc}}$  come l'insieme di tutti i possibili stati che il discorso può assumere durante la sua evoluzione. Uno stato discorsivo  $D \in X_{\text{disc}}$  codifica:

- L'insieme dei discourse referents introdotti fino a quel punto:  $\text{Ref}(D)$
- Le condizioni predicative affermate su questi referenti:  $\text{Cond}(D)$
- La struttura informazionale (topic, focus):  $\text{IS}(D)$
- Il common ground accumulato:  $\text{CG}(D)$

La relazione di accessibilità anaforica  $A \subseteq X_{\text{disc}} \times X_{\text{disc}}$  è definita:  $D_1 A D_2$  se e solo se i referenti introdotti in  $D_1$  sono accessibili per risoluzione anaforica in  $D_2$ . Questa relazione ha proprietà strutturali:

Riflessività:  $D A D$  (i referenti appena introdotti sono immediatamente accessibili nello stesso stato)

Transitività parziale: Se  $D_1 A D_2$  e  $D_2 A D_3$ , tipicamente  $D_1 A D_3$ , ma ci sono eccezioni dovute a isole anaforiche.

Asimmetria temporale: Se  $D_1$  precede temporalmente  $D_2$  (nella sequenza lineare del discorso) e  $D_1 A D_2$ , generalmente non  $D_2 A D_1$  (no riferimento anaforico a referenti futuri), salvo catafora marcata.

Questa relazione  $A$  genera una topologia alessandrina su  $X_{\text{disc}}$  dove l'intorno aperto di uno stato  $D$  è:

$U_D = \{D' \in X_{\text{disc}} : D A D'\} =$  insieme degli stati dove i referenti di  $D$  sono accessibili

Gli aperti della topologia sono unioni di questi intorni, corrispondenti a "regioni di accessibilità" nel discorso.

### 9.7.2 Fascio dei Discourse Referents Accessibili

Definiamo un fascio  $F_{\text{DRS}}$  su  $X_{\text{disc}}$  che assegna a ogni aperto  $U$  (regione di stati discorsivi) l'insieme delle possibili DRS (Discourse Representation Structures) definite coerentemente su  $U$ :

$F_{\text{DRS}}(U) = \{\text{DRS } \sigma = (\text{Ref}_\sigma, \text{Cond}_\sigma) \text{ tali che } \sigma \text{ è supportata da tutti gli stati in } U \text{ con compatibilità locale}\}$

Una DRS  $\sigma$  è "supportata" da uno stato  $D$  se i referenti in  $\text{Ref}_\sigma$  sono sottoinsieme dei referenti accessibili in  $D$ , e le condizioni in  $\text{Cond}_\sigma$  sono soddisfatte nella configurazione di  $D$ .

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F\_DRS(U) \rightarrow F\_DRS(V)$  per  $V \subseteq U$  prendono una DRS definita sull'ampia regione  $U$  e la restringono a  $V$ , potenzialmente:

- Rimuovendo referenti che cessano di essere accessibili in  $V$
- Modificando condizioni che sono valide solo in  $U$  ma non in  $V$
- Preservando il nucleo di referenti e condizioni stabili attraverso la restrizione

Questo modella il fenomeno che progredendo nel discorso (passando a stati  $D$  più avanzati, quindi a aperti  $V$  più ristretti nella topologia), alcuni referenti introdotti precedentemente potrebbero uscire dall'accessibilità, mentre nuovi referenti vengono aggiunti.

### 9.7.3 Pronomi come Morfismi di Risoluzione Anaforica

Un pronome anaforico  $\text{pron}$  in uno stato discorsivo  $D$  richiede risoluzione: deve essere associato a un referente antecedente  $x \in \text{Ref}(D)$  che è accessibile in  $D$  e compatibile con i vincoli morfosintattici del pronome (accordo di genere, numero, persona).

Modelliamo la risoluzione anaforica come un morfismo di fasci:

$$\pi: F\_pron \rightarrow F\_DRS$$

dove  $F\_pron$  è il fascio dei pronomi (associando a ogni stato l'insieme dei pronomi presenti) e  $\pi$  assegna a ogni pronome il suo antecedente nella DRS contestuale.

Per ogni aperto  $U$  e pronome  $p$  presente in qualche stato  $D \in U$ ,  $\pi_U(p)$  seleziona un referente  $x \in \text{Ref}(\sigma)$  dove  $\sigma \in F\_DRS(U)$  è la DRS corrente. Questa selezione rispetta vincoli:

Accessibilità topologica:  $x$  deve essere introdotto in uno stato  $D'$  tale che  $D' \triangleleft D$ , ovvero  $D'$  è nell'intorno aperto (backwards-accessible) di  $D$ .

Accordo morfologico:  $\text{genere}(p) = \text{genere}(x)$ ,  $\text{numero}(p) = \text{numero}(x)$ , etc.

Salienza pragmatica: tra referenti accessibili e morfologicamente compatibili,  $x$  è il più saliente secondo criteri pragmatici (recenza di menzione, prominenza sintattica, topic status).

La compatibilità di  $\pi$  con le mappe di restrizione garantisce coerenza:

$$\rho_{\{DRS\}\{U,V\}} \circ \pi_U = \pi_V \circ \rho_{\{pron\}\{U,V\}}$$

Risolvere un pronome e poi specializzare il discorso dà lo stesso risultato che specializzare e poi risolvere. Questa commutatività è non triviale e cattura vincoli profondi sulla coerenza anaforica.

### 9.7.4 Donkey Sentences e Anafora Dinamica: Fasci di Binding Variabile

Le donkey sentences sono costruzioni anaforiche problematiche che hanno sfidato teorie semantiche standard, portando allo sviluppo della semantica dinamica (DRT, Dynamic Predicate Logic). Un esempio classico:

"Ogni contadino che possiede un asino lo picchia."

La struttura superficiale è:

Ogni  $x$  [ $\text{contadino}(x) \wedge \exists y[\text{asino}(y) \wedge \text{possiede}(x,y)]$ ] [ $\text{picchia}(x, y)$ ]

Il pronome "lo" ( $y$ ) è anaforicamente dipendente dall'indefinito "un asino" che appare sintatticamente nel restrictor del quantificatore universale "ogni", non nel suo nuclear scope dove compare il pronome. Nella logica classica, la variabile  $y$  legata dall'esistenziale nel restrictor non dovrebbe essere accessibile nel nuclear scope, generando un problema di binding.

La semantica dinamica risolve questo trattando gli indefiniti non come quantificatori esistenziali classici ma come introduttori di discourse referents che possono essere accessibili anche al di fuori del loro scopo sintattico immediato. Modelliamo questo nella teoria dei fasci permettendo che i referenti si "propaghino" attraverso mappe di estensione tra fasci.

Definiamo stati discorsivi  $D\_restrictor$  (valutazione del restrictor) e  $D\_nuclear$  (valutazione del nuclear scope) con  $D\_restrictor \sqsubseteq D\_nuclear$  (accessibilità). L'indefinito "un asino" introduce un referente  $y$  in  $D\_restrictor$ . La mappa di transizione:

$\tau: F\_DRS(D\_restrictor) \rightarrow F\_DRS(D\_nuclear)$

estende la DRS dal restrictor al nuclear scope, propagando il referente  $y$ . Formalmente:

$\tau(\sigma\_restrictor) = \sigma\_nuclear$  dove  $\text{Ref}(\sigma\_nuclear) = \text{Ref}(\sigma\_restrictor) \cup \{\text{nuovi referenti}\}$  e  $y \in \text{Ref}(\sigma\_nuclear)$

Questa estensione preserva l'accessibilità di  $y$ , permettendo al pronome "lo" nel nuclear scope di risolversi a  $y$ .

La quantificazione universale "ogni" itera questa struttura su tutti gli individui  $x$  che soddisfano il restrictor, creando una famiglia di DRS parametrizzate da  $x$ . Il fascio  $F\_DRS$  su questo spazio parametrico assegna a ogni valore di  $x$  una DRS dove  $y$  è l'asino posseduto da  $x$ .

Le mappe di restrizione catturano la dipendenza funzionale:  $y$  dipende funzionalmente da  $x$  ( $y = f(x)$ ) dove  $f$  assegna a ogni contadino il suo asino, o gli asini in caso di possesso multiplo).

### 9.7.5 Anafora Plurale e E-type Pronouns: Fasci di Insiemi

L'anafora plurale presenta complessità aggiuntive. Consideriamo:

"Alcuni studenti hanno consegnato tardi. Sono stati penalizzati."

Il pronome plurale "sono" (terza persona plurale) si riferisce anaforicamente all'insieme degli studenti che hanno consegnato tardi, introdotto dall'indefinito plurale "alcuni studenti".

Questo non è un singolo discourse referent ma un insieme di referenti, o un referente collettivo.

Modelliamo questo estendendo  $F\_DRS$  per includere referenti plurali. Invece di  $Ref(D) = \{x_1, x_2, \dots\}$  (insieme di referenti singolari), permettiamo:

$$Ref(D) = \{x_1, x_2, \dots\} \cup \{X_1, X_2, \dots\}$$

dove  $x_i$  sono referenti singolari,  $X_j$  sono referenti plurali (insiemi di individui o quantità).

I pronomi plurali risolvono a referenti plurali:  $\pi(\text{loro}) = X$  dove  $X$  è un insieme. Le mappe di restrizione devono preservare strutture plurali, propagando insiemi coerentemente.

Gli e-type pronouns sono pronomi che si comportano semanticamente come descrizioni definite dinamicamente costruite dal contesto, piuttosto che come variabili legate. Esempio:

"Giovanni ha comprato un libro. È costato molto."

Il pronome "è" (terza persona singolare neutro implicito nell'Italiano, più esplicito in "it" inglese) riprende "un libro", ma "un libro" è un indefinito, non un'espressione referenziale definita. Come può il pronome riferirsi?

Secondo Evans e altri, il pronome è un e-type pronoun che funziona come la descrizione definita "il libro che Giovanni ha comprato", costruita dinamicamente dal contesto precedente. Nel fascio  $F\_DRS$ , questa costruzione dinamica è modellata come operazione che prende il referente indefinito introdotto  $y$  e lo "definizza" tramite le condizioni contestuali:

$y$  introdotto da "un libro" + condizione "comprato(Giovanni,  $y$ )"  $\rightarrow$  "il libro  $y$  tale che comprato(Giovanni,  $y$ )"

Il pronome risolve a questa descrizione definita costruita. Le mappe di restrizione devono tracciare quali condizioni contestuali sono disponibili per la costruzione di descrizioni definite, preservando coerenza attraverso specializzazioni.

## 9.8 Coerenza Testuale e Relazioni Retoriche: Fasci su Grafi Discorsivi

La struttura del discorso va oltre sequenze lineari di enunciati e coinvolge relazioni retoriche complesse tra segmenti testuali: elaborazione, contrasto, causa-effetto, spiegazione, evidenza. Queste relazioni formano grafi diretti dove nodi sono segmenti discorsivi e archi sono relazioni retoriche. Possiamo definire fasci su questi grafi catturando vincoli di coerenza.

### 9.8.1 Spazio Discorsivo come Grafo Orientato e Topologia Indotta

Sia  $G = (V, E)$  un grafo diretto dove:

- $V = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$  sono segmenti discorsivi (frasi, clausole, o unità maggiori)
- $E \subseteq V \times V$  sono archi rappresentanti relazioni retoriche

Un arco  $(s_i, s_j) \in E$  significa " $s_j$  elabora/spiega/contrasta/continua  $s_i$ " secondo qualche relazione retorica specifica.

Induciamo una topologia su  $V$  dalla struttura del grafo. Definiamo per ogni nodo  $s \in V$ :

$$U_s = \{t \in V : \text{esiste cammino diretto da } s \text{ a } t \text{ in } G\}$$

Ovvero,  $U_s$  contiene tutti i nodi raggiungibili da  $s$  seguendo archi. Questa collezione  $\{U_s : s \in V\}$  genera una topologia alessandrina su  $V$ .

Gli aperti rappresentano "regioni di influenza retorica": se  $s$  appartiene a un aperto  $U$ , allora tutti i nodi retoricamente dipendenti da  $s$  appartengono a  $U$ . La topologia cattura propagazione di vincoli e dipendenze attraverso la struttura retorica del testo.

### 9.8.2 Fascio di Coerenza Semantica su Grafi Discorsivi

Definiamo  $F_{\text{coer}}$  come fascio di condizioni di coerenza su  $G$ . Per ogni aperto  $U$  (regione di nodi):

$$F_{\text{coer}}(U) = \{\text{assegnazioni } \sigma: U \rightarrow \text{Interpretazioni tali che per ogni } (s,t) \in E \text{ con } s,t \in U, \sigma(s) \text{ è retoricamente coerente con } \sigma(t) \text{ secondo la relazione che connette } s \text{ e } t\}$$

La "coerenza retorica" dipende dal tipo di relazione. Per esempio:

**Elaborazione:** Se  $(s,t)$  è relazione di elaborazione, allora  $\sigma(t)$  deve contenere dettagli, specificazioni, esemplificazioni che raffinano o sviluppano contenuto introdotto in  $\sigma(s)$ . Formalmente, deve esistere un morfismo di raffinamento  $\rho_{\text{elab}}: \sigma(s) \rightarrow \sigma(t)$  che preserva nuclei semantici aggiungendo dettagli.

**Contrasto:** Se  $(s,t)$  è relazione di contrasto, allora  $\sigma(s)$  e  $\sigma(t)$  devono essere semanticamente in opposizione lungo qualche dimensione saliente, ma coerenti nel presupporre uno sfondo comune. Esiste un dominio comune  $D$  e proprietà  $P_1, P_2$  incompatibili tali che  $\sigma(s)$  afferma  $P_1(D)$  e  $\sigma(t)$  afferma  $P_2(D)$  con  $P_1 \wedge P_2 = \perp$ .

**Causa-Effetto:** Se  $(s,t)$  è relazione causale,  $\sigma(s)$  descrive una situazione che causalmente implica la situazione descritta in  $\sigma(t)$ . Deve esistere una relazione causale  $\mathcal{R}_{\text{causal}}$  tale che  $\sigma(s) \mathcal{R}_{\text{causal}} \sigma(t)$ .

**Evidenza:** Se  $(s,t)$  è relazione evidenziale,  $\sigma(t)$  fornisce supporto epistemico o giustificazione per  $\sigma(s)$ .  $\sigma(t)$  aumenta la probabilità o la credibilità di  $\sigma(s)$ .

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{coer}}(U) \rightarrow F_{\text{coer}}(V)$  per  $V \subseteq U$  prendono una assegnazione coerente sulla regione ampia  $U$  e la restringono a  $V$ , preservando coerenza locale. Se  $\sigma \in F_{\text{coer}}(U)$  è globalmente coerente su  $U$ , allora  $\sigma|_V$  è coerente su  $V$ .

### 9.8.3 Violazioni di Coerenza come Ostruzioni Coomologiche

Quando un testo presenta incoerenze locali che non possono essere risolte globalmente, otteniamo fallimenti della condizione di fascio. Consideriamo un testo con tre segmenti:

$s_1$ : "Giovanni è vegetariano."  $s_2$ : "Ha ordinato una bistecca."

$s_3$ : "È sempre stato coerente con i suoi principi."

Relazioni retoriche:

- $(s_1, s_2)$ : contrasto (apparente)
- $(s_1, s_3)$ : elaborazione (affermazione di coerenza)
- $(s_2, s_3)$ : tensione (bistecca sembra violare coerenza vegetariana)

Localmente, possiamo costruire interpretazioni su sottoinsiemi:

- $U_1 = \{s_1, s_3\}$ : coerente (Giovanni è vegetariano coerente)
- $U_2 = \{s_1, s_2\}$ : coerente se interpretiamo "bistecca" ironicamente, o come eccezione, o come errore del cameriere
- $U_3 = \{s_2, s_3\}$ : coerente se interpretiamo "coerente con principi" come non includente vegetarianismo

Ma quando cerchiamo interpretazione globale su  $\{s_1, s_2, s_3\}$ , le interpretazioni locali non si incollano coerentemente. La restrizione di  $\sigma_{13}$  (interpretazione su  $U_{13} = \{s_1, s_3\}$ ) a  $\{s_1\}$  differisce dalla restrizione di  $\sigma_{12}$  (interpretazione su  $U_{12} = \{s_1, s_2\}$ ) a  $\{s_1\}$  per quanto riguarda l'interpretazione di "vegetariano" (rigido vs ammettente eccezioni).

Questa incompatibilità genera un 1-cociclo non banale che contribuisce a  $H^1(\{s_1, s_2, s_3\}, F_{\text{coer}}) \neq 0$ . L'elemento non banale misura l'ostruzione coomologica alla coerenza globale. Il testo è percepito come incoerente, paradossale, o richiedente risoluzione interpretativa creativa (forse  $s_2$  è riferito a un'altra persona, o c'è ironia, o c'è un salto temporale).

## 9.9 Modalità e Spazi Alessandrini: Oltre Kripke

La semantica di Kripke per logica modale usa frames  $(W, R)$  dove  $W$  sono mondi possibili e  $R$  è accessibilità. Abbiamo discusso come questi siano spazi topologici alessandrini. Estendiamo ora questa connessione esplorando modalità oltre i frames classici.

### 9.9.1 Modalità Graduata e Topologie Metriche

Nella semantica modale standard, un mondo  $w$  accede a un mondo  $v$  o non accede (relazione binaria). Ma molte modalità nel linguaggio naturale sono graduate: "molto probabilmente", "forse", "difficilmente possibile", "quasi certamente".

Modelliamo questo con spazi metrici di mondi dove  $d(w, v)$  misura "distanza modale" tra  $w$  e  $v$ . Mondi vicini ( $d$  piccolo) sono altamente accessibili, mondi lontani ( $d$  grande) sono scarsamente accessibili.

La topologia metrica indotta ha aperti  $U_{\varepsilon}(w) = \{v : d(w, v) < \varepsilon\}$ . Operatori modali graduati corrispondono a threshold di distanza:

$\Box_{\varepsilon} \varphi$  (necessità  $\varepsilon$ -forte):  $\varphi$  vale in tutti i mondi entro distanza  $\varepsilon$  da  $w$

$\Diamond_{\delta} \varphi$  (possibilità  $\delta$ -debole):  $\varphi$  vale in almeno un mondo entro distanza  $\delta$  da  $w$

Variando  $\varepsilon$  e  $\delta$  otteniamo scala continua di forza modale. I fasci modali  $F_\varphi$  assegnano a ogni aperto  $U$  (insieme di mondi) valori di verità di  $\varphi$  su  $U$ . Le mappe di restrizione catturano come verità modale si specializzi restringendo a sottoinsiemi di mondi.

Un vantaggio di questa topologizzazione è che permette inferenze graduate: da  $\Box_\varepsilon \varphi$  e  $\varepsilon < \varepsilon'$  inferiscono  $\Box_{\{\varepsilon'\}} \varphi$  (necessità più forte implica necessità più debole). Questo è una forma di monotonicità topologica: aperti più piccoli ( $\varepsilon$  più piccolo) danno necessità più forte.

### 9.9.2 Modalità Temporale e Topologia su Timeline

La modalità temporale ("sarà vero che", "era vero che", "sempre", "mai") può essere modellata topologicamente su uno spazio temporale  $T$  (tipicamente  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{Z}$  con topologia euclidea/discreta).

Per ogni istante  $t \in T$ , definiamo:

Futuro:  $F(t) = \{t' \in T : t' > t\}$  (istanti dopo  $t$ ) Passato:  $P(t) = \{t' \in T : t' < t\}$  (istanti prima  $t$ )

Questi generano topologie. Gli aperti di futuro sono unioni di  $\{F(t) : t \in T\}$ , e similmente per passati.

Il fascio temporale  $F_{\text{temp}}$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq T$  (intervallo temporale) le proposizioni valide in quell'intervallo. Gli operatori modali temporali:

$\Diamond_F \varphi$  ("eventualmente  $\varphi$ "): esiste  $t' \in F(t)$  dove  $\varphi(t')$  vale

$\Box_F \varphi$  ("sempre in futuro  $\varphi$ "): per ogni  $t' \in F(t)$ ,  $\varphi(t')$  vale

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{temp}}(U) \rightarrow F_{\text{temp}}(V)$  per  $V \subseteq U$  (sotto-intervallo) specializzano interpretazioni temporali. Se  $\sigma \in F_{\text{temp}}([0,10])$  specifica verità di  $\varphi$  nell'intervallo  $[0,10]$ , allora  $\sigma|_{\{[3,7]\}}$  specifica verità solo nel sotto-intervallo  $[3,7]$ .

La composizionalità temporale si riflette in:  $\rho_{\{[0,10],[3,7]\}} = \rho_{\{[0,7],[3,7]\}} \circ \rho_{\{[0,10],[0,7]\}}$ , ovvero restrizioni temporali sono composizionali.

### 9.9.3 Modalità Epistemica e Topologia su Spazi di Informazione

La modalità epistemica ("A sa che  $\varphi$ ", "è possibile che  $\varphi$  per quanto A sa") dipende dallo stato informativo dell'agente A. Modelliamo questo con spazi informativi.

Sia  $I$  l'insieme degli stati informativi possibili per A. Uno stato  $i \in I$  specifica cosa A sa in  $i$ . Definiamo relazione di informazione  $i \leq j$  se  $i$  è meno informato di  $j$  (tutto ciò che è noto in  $i$  è noto in  $j$ , ma  $j$  può sapere di più).

Questa relazione genera topologia alessandrina con aperti up-closed: se  $i \in U$  e  $i \leq j$ , allora  $j \in U$ . Gli aperti rappresentano "regioni di compatibilità epistemica".

Fascio epistemico  $F_{\text{epist}}$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq I$  le proposizioni che A sa in tutti gli stati informativi in  $U$ . Le mappe di restrizione modellano acquisizione di informazione: passando da  $U$  a  $V \subseteq U$  (stati più informati), la conoscenza aumenta (o rimane stabile).

Operatore  $K_A \varphi$  ("A sa che  $\varphi$ "):  $\varphi \in F_{\text{epist}}(U)$  per l'aperto  $U$  contenente lo stato informativo corrente di A.

Operatore  $\Diamond_A \varphi$  ("è compatibile con la conoscenza di A che  $\varphi$ "): esiste stato  $i$  accessibile epistemicamente dove  $\varphi$  vale.

Le mappe di restrizione garantiscono monotonicità epistemica: se A sa  $\varphi$  in stato  $i$  e acquista informazione passando a  $j \geq i$ , continua a sapere  $\varphi$  in  $j$  (la conoscenza è preservata sotto espansione informazionale, assumendo non revisione).

## 9.10 Applicazioni Computazionali e Algoritmi su Fasci Semantici

Dopo aver sviluppato la teoria matematica, consideriamo come implementare effettivamente fasci semantici in sistemi computazionali per processamento del linguaggio naturale, ragionamento semantico, e intelligenza artificiale.

### 9.10.1 Rappresentazione Discreta di Spazi Topologici Contestuali

Gli spazi topologici continui infiniti sono computazionalmente intrattabili. Dobbiamo discretizzare  $X$  in un insieme finito  $X_{\text{disc}} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  di "contesti prototipici" rappresentativi.

La topologia  $\tau$  su  $X_{\text{disc}}$  è specificata enumerando esplicitamente gli aperti, o equivalentemente specificando una base finita  $B = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  dove ogni aperto è unione di elementi di  $B$ .

Per esempio,  $X_{\text{disc}}$  potrebbe contenere:

- $c_1$ : contesto bancario formale
- $c_2$ : contesto bancario informale
- $c_3$ : contesto scolastico formale
- $c_4$ : contesto scolastico informale
- $c_5$ : contesto domestico
- ...

Base topologica  $B$  potrebbe includere:

- $B_{\text{bancario}} = \{c_1, c_2\}$ : tutti i contesti bancari
- $B_{\text{scolastico}} = \{c_3, c_4\}$ : tutti i contesti scolastici
- $B_{\text{formale}} = \{c_1, c_3\}$ : tutti i contesti formali
- $B_{\text{informale}} = \{c_2, c_4, c_5\}$ : tutti i contesti informali

Gli aperti sono generati per unioni di base:  $U_{\text{bancario\_formale}} = B_{\text{bancario}} \cap B_{\text{formale}} = \{c_1\}$ , ecc.

### 9.10.2 Strutture Dati per Fasci: Tabelle di Restrizione

Un fascio  $F$  su  $X_{\text{disc}}$  finito può essere rappresentato come:



- Dizionario  $F.sections: U \rightarrow F(U)$  che mappa ogni aperto a un insieme (o lista) di sezioni
- Dizionario  $F.restrictions: (U,V) \rightarrow (F(U) \rightarrow F(V))$  che mappa coppie di aperti con  $V \subseteq U$  a funzioni di restrizione

Per efficienza, memorizziamo solo:

- Sezioni su aperti base e aperti frequentemente usati
- Restrizioni tra aperti base
- Generiamo altre restrizioni per composizione quando richieste

Pseudocodice:

class Sheaf:

```
def __init__(self, space):
    self.space = space # Spazio topologico discreto
    self.sections = {} # {open: set_of_sections}
    self.restrictions = {} # {(U,V): restriction_map}

def get_sections(self, U):
    """Ritorna sezioni su aperto U"""
    if U in self.sections:
        return self.sections[U]
    # Genera per restrizione da aperti più grandi se non memorizzato
    for W in self.space.opens():
        if U.is_subset_of(W) and W in self.sections:
            return self.restrict(self.sections[W], W, U)
    return set() # Nessuna sezione trovata

def restrict(self, sections, U, V):
    """Applica mappa di restrizione da U a V"""
    if (U,V) in self.restrictions:
        return {self.restrictions[(U,V)](s) for s in sections}
    # Composizione di restrizioni se non diretta
    for W in self.space.opens():
        if V.is_subset_of(W) and W.is_subset_of(U):
            if (U,W) in self.restrictions and (W,V) in self.restrictions:
                mid = self.restrict(sections, U, W)
                return self.restrict(mid, W, V)
    return set() # Fallback

def glue(self, local_sections, covering):
    """Tenta di incollare sezioni locali su copertura"""
    # Verifica compatibilità sulle sovrapposizioni
    for U_i in covering:
        for U_j in covering:
            intersection = U_i.intersect(U_j)
            if not intersection.is_empty():
```

```

    if self.restrict(local_sections[U_i], U_i, intersection) != \
        self.restrict(local_sections[U_j], U_j, intersection):
        return None # Incompatibilità, no incollamento
# Se compatibili, costruisci sezione globale
union = covering.union()
global_section = self.construct_from_local(local_sections, covering)
return global_section

```

### 9.10.3 Calcolo di Coomologia: Algoritmi per $H^1$

Calcolare gruppi di coomologia computazionalmente richiede:

1. **Costruzione del complesso di Čech:** Dato ricoprimento  $U = \{U_1, \dots, U_n\}$ , formare:
  - $C^0(U, F) = \text{prodotto } \prod_i F(U_i)$
  - $C^1(U, F) = \text{prodotto } \prod_{\{i,j\}} F(U_i \cap U_j)$
2. **Definizione del cobordo  $\delta^0$ :**  $C^0 \rightarrow C^1$  Per 0-cocatena  $(s_i)$ , calcolare  $\delta^0(s)_i = s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j}$
3. **Calcolo di nucleo e immagine:**
  - $Z^1 = \text{Ker}(\delta^0) = \{(s_i) : \delta^0(s) = 0\}$  (1-cocicli)
  - $B^1 = \text{Im}(\delta^0)$  (1-cobordi)
4. **Quoziente:**  $H^1 = Z^1 / B^1$

Per fasci di gruppi abeliani (o moduli), questo è algebra lineare:

- $C^0, C^1$  sono spazi vettoriali (o gruppi abeliani)
- $\delta^0$  è omomorfismo lineare (matrice)
- $\text{Ker}$  e  $\text{Im}$  sono sottospazi calcolabili con metodi standard (eliminazione gaussiana)
- Quoziente è spazio quoziente vettoriale

Pseudocodice (versione semplificata per gruppi abeliani):

```

def compute_H1(sheaf, covering):
    """Calcola  $H^1(X, F)$  per ricoprimento dato"""
    # Passo 1: Costruire  $C^0$  e  $C^1$ 
    C0 = [sheaf.get_sections(U) for U in covering]
    C1 = [sheaf.get_sections(U.intersect(V))
           for U in covering for V in covering if not U.intersect(V).is_empty()]

    # Passo 2: Definire operatore cobordo  $\delta^0$  come matrice
    delta0 = build_coboundary_matrix(sheaf, covering)

    # Passo 3: Calcolare nucleo e immagine
    Z1 = kernel(delta0) # 1-cocicli
    B1 = image(delta0) # 1-cobordi

```

```
# Passo 4: Calcolare quoziente Z1 / B1
H1 = quotient_space(Z1, B1)
```

```
return H1
```

Per fasci di insiemi (non abeliani), la struttura è più complessa e richiede tecniche combinatoriche invece di algebra lineare.

#### 9.10.4 Integrazione con Modelli di Linguaggio Neurali

I fasci semantici possono essere integrati con architetture neurali moderne (Transformers, modelli linguistici pre-addestrati):

##### Architettura ibrida:

- Layer neurali inferiori: encoding contestuale denso (BERT-style)
- Layer intermedi: proiezione su spazio topologico discreto  $X_{\text{disc}}$  (classificazione contestuale)
- Layer superiori: operazioni su fasci (restrizione, incollamento, risoluzione ostruzioni)

##### Pipeline:

1. Input: testo  $T = \text{"Il banco è vuoto"}$
2. Encoding contestuale: BERT/GPT produce rappresentazione densa  $\text{ctx} \in \mathbb{R}^d$
3. Classificazione contestuale: rete classifica  $\text{ctx} \rightarrow c \in X_{\text{disc}}$  (per esempio,  $c = c_{\text{bancario}}$ )
4. Retrieval fascio: cercare interpretazioni in  $F_{\text{banco}}(U_c)$  dove  $U_c$  è aperto contenente  $c$
5. Selezione sezione: scegliere  $s \in F_{\text{banco}}(U_c)$  più compatibile con contesto ulteriore
6. Output: interpretazione  $s$  (per esempio, "sportello bancario")

##### Training:

- Dataset annotato con coppie (testo, contesto, interpretazione)
- Loss: distanza tra interpretazione predetta e gold standard
- Backpropagation attraverso classificatore contestuale
- Parametri del fascio (sezioni, restrizioni) possono essere appresi o specificati simbolicamente

Questa architettura ibrida combina robustezza statistica dei modelli neurali con struttura esplicita e interpretabilità dei fasci matematici.

#### 9.11 Estensioni Teoriche Avanzate: $\infty$ -Fasci e Teoria Omotopica

Per fenomeni semantici estremamente complessi con dipendenze di ordine superiore, possiamo generalizzare da fasci ordinari a strutture categoriali superiori.

### 9.11.1 $\infty$ -Categorie e $\infty$ -Faschi

Un  $\infty$ -fascio (o  $\infty$ -stack) è una generalizzazione dove invece di assegnare insiemi (0-categorie) a aperti, assegnano  $\infty$ -categorie (o  $\infty$ -gruppidi). Questo permette di catturare non solo oggetti e morfismi ma anche morfismi tra morfismi, e così via all'infinito.

Per applicazioni semantiche,  $\infty$ -faschi potrebbero modellare:

- Interpretazioni (oggetti)
- Trasformazioni tra interpretazioni (1-morfismi)
- Trasformazioni tra trasformazioni (2-morfismi)
- ...

Per esempio, interpretare una metafora complessa potrebbe richiedere non solo mapping concettuale (1-morfismo) ma anche meta-mapping (come il mapping stesso è guidato da principi cognitivi - 2-morfismo).

### 9.11.2 Coomologia Derivata e Funtori Derivati

In algebra omologica, i funtori derivati generalizzano costruzioni classiche catturando informazione coomologica di ordine superiore. Per fasci  $F$ , i funtori derivati  $R^i \Gamma(F)$  (dove  $\Gamma$  è il funtore sezioni globali) generalizzano  $H^i(X, F)$ .

Applicazioni semantiche: i funtori derivati potrebbero misurare ostruzioni di ordine arbitrariamente alto alla formazione di significati globali. Mentre  $H^1$  misura impossibilità di incollare sezioni locali,  $R^2$  potrebbe misurare impossibilità di "incollare incollamenti" (meta-ostruzioni).

## Capitolo 10: Aspetto, Tempo e Struttura Eventuale nei Fasci Semantici

L'aspetto grammaticale e la struttura eventuale rappresentano domini dove la dipendenza contestuale interagisce profondamente con proprietà temporali e causali degli eventi descritti linguisticamente. Modelliamo questi fenomeni attraverso fasci su spazi topologici che incorporano dimensioni temporali e eventuali.

### 10.1 Spazio degli Eventi e Topologia delle Strutture Temporali

Definiamo uno spazio  $E$  di eventi possibili, dove ogni punto  $e \in E$  rappresenta un'occorrenza eventuale specifica con proprietà determinate:

- Tipo eventuale:  $\tau(e) \in \{\text{stato, processo, achievement, accomplishment}\}$  (tassonomia di Vendler)
- Estensione temporale:  $T(e) \subseteq \mathbb{R}$  (intervallo o istante temporale)
- Partecipanti:  $\text{Part}(e)$  = insieme di entità coinvolte nell'evento
- Struttura interna:  $\text{Struct}(e)$  = fasi, sotto-eventi, transizioni

La topologia su  $E$  è indotta da relazioni di inclusione temporale e mereologica tra eventi. Due eventi  $e_1, e_2$  sono topologicamente vicini se:

- Le loro estensioni temporali si sovrappongono:  $T(e_1) \cap T(e_2) \neq \emptyset$
- Condividono partecipanti:  $\text{Part}(e_1) \cap \text{Part}(e_2) \neq \emptyset$
- Hanno tipi eventuali simili o correlati

Definiamo aperti come regioni evento-temporali:

$U_{[t_1, t_2]} = \{e \in E : T(e) \subseteq [t_1, t_2]\}$  = eventi contenuti completamente nell'intervallo  $[t_1, t_2]$

$U_{\cap[t_1, t_2]} = \{e \in E : T(e) \cap [t_1, t_2] \neq \emptyset\}$  = eventi che intersecano l'intervallo

$U_{\text{processo}} = \{e \in E : \tau(e) = \text{processo}\}$  = eventi di tipo processuale

Questi aperti generano una topologia ricca dove possiamo esprimere vincoli temporali e aspettuali complessi.

## 10.2 Fascio dell'Aspetto Perfettivo e Imperfettivo

L'aspetto grammaticale modula come un evento è presentato o concettualizzato rispetto al suo svolgimento temporale. Aspetto perfettivo presenta l'evento come totalità completata, aspetto imperfettivo presenta l'evento come in svolgimento o abituale.

Definiamo fasci  $F_{\text{perf}}$  e  $F_{\text{imperf}}$  che assegnano a ogni aperto  $U \subseteq E$  interpretazioni aspettuali:

$F_{\text{perf}}(U) = \{s : U \rightarrow \text{Interpretazioni tali che per ogni } e \in U, s(e) \text{ presenta } e \text{ come completato, delimitato, visto dall'esterno}\}$

$F_{\text{imperf}}(U) = \{s : U \rightarrow \text{Interpretazioni tali che per ogni } e \in U, s(e) \text{ presenta } e \text{ come in corso, non delimitato, visto dall'interno}\}$

Le mappe di restrizione catturano come l'aspetto si comporta sotto specializzazioni evento-temporali.

Consideriamo esempio concreto in italiano:

Perfettivo: "Giovanni corse al mercato" (passato remoto) Imperfettivo: "Giovanni correva al mercato" (imperfetto)

Nella frase perfettiva, l'evento di correre è presentato come un tutto delimitato, completato nel passato, con inizio e fine impliciti. Il fascio  $F_{\text{perf}}$  assegna a questo evento e una sezione che specifica:

- e è visto come unità atomica temporalmente delimitata
- Focus sulla transizione da "non correre" a "correre" a "non correre più"
- Completamento enfaticizzato

Nella frase imperfettiva, lo stesso tipo di evento è presentato diversamente.  $F_{\text{imperf}}$  assegna una sezione che specifica:

- e è visto come processo esteso senza enfasi sui confini
- Focus sulla fase interna, progressione senza completamento necessario
- Possibile abitudine o duratività

Le mappe di restrizione modellano come cambiando la finestra temporale di osservazione (restringendo U a sotto-intervalli), l'interpretazione aspettuale si adatta. Per esempio:

$\rho_{\{U_{\text{lungo}}, U_{\text{breve}}\}}$ : Se  $U_{\text{lungo}} = [0, 60\text{min}]$  e  $U_{\text{breve}} = [10, 20\text{min}] \subseteq U_{\text{lungo}}$ , restringere un'interpretazione imperfettiva da  $U_{\text{lungo}}$  a  $U_{\text{breve}}$  mantiene l'imperfettività ma focalizza su una fase interna specifica.

### 10.3 Telicità e Culminazione: Fasci di Strutture Eventuali

Eventi telici hanno un punto culminante intrinseco, un telos che quando raggiunto completa l'evento. Eventi atelici non hanno tale punto culminante naturale.

Telico: "Giovanni costruì una casa" (raggiunge completamento quando la casa è finita)

Atelico: "Giovanni corse" (può continuare indefinitamente, nessun punto culminante intrinseco)

Modelliamo telicità attraverso un sotto-fascio  $F_{\text{telic}} \subseteq F_{\text{evento}}$  che contiene solo eventi con struttura telica. Per ogni aperto U:

$F_{\text{telic}}(U) = \{\text{strutture } (e, \text{cul}) : e \in U \text{ è evento telico, cul è punto/fase culminante di } e\}$

Il punto culminante cul è un sotto-evento (o istante) all'interno di  $T(e)$  tale che raggiungere cul implica completamento di e.

Le mappe di restrizione devono preservare struttura telica. Se  $(e, \text{cul}) \in F_{\text{telic}}(U)$  e restringiamo a  $V \subseteq U$  contenente solo la parte finale di e (inclusente cul), otteniamo:

$\rho_{\{U, V\}}((e, \text{cul})) = (e|_V, \text{cul})$  dove  $e|_V$  è la restrizione di e alla porzione temporale coperta da V

Se V non contiene cul (solo fasi preliminari), la restrizione potrebbe non essere più telica, oppure produce un evento "troncato" con telicità sospesa.

### 10.4 Interazione Aspetto-Argomento: Composizionalità Eventuale

Un fenomeno profondo è che la telicità non è proprietà solo del verbo ma emerge composizionalmente dall'interazione verbo-argomento:

"Giovanni mangiò la mela" - telico (completamento quando la mela è consumata) "Giovanni mangiò mele" - atelico (nessun punto culminante definito, può continuare)

La differenza risiede nel determinante: "la mela" (NP definito, quantità delimitata) vs "mele" (NP bare plurale, quantità indefinita).

Modelliamo questo attraverso morfismi tra fasci:

$\phi_{\text{comp}}: F_{\text{verbo}} \times F_{\text{argomento}} \rightarrow F_{\text{evento}}$

Questo morfismo prende sezioni dal fascio del verbo e dal fascio dell'argomento e le combina composizionalmente producendo strutture eventuali:

$\varphi_{\text{comp}}(s_{\text{mangiare}}, s_{\text{la_mela}}) = \text{evento telico con culminazione "mela completamente consumata"}$

$\varphi_{\text{comp}}(s_{\text{mangiare}}, s_{\text{mele}}) = \text{evento atelico processuale senza culminazione intrinseca}$

La compatibilità del morfismo con restrizioni contestuali garantisce che la composizionalità si comporta coerentemente:

$$\rho^{\{\text{evento}\}}_{\{U,V\}} \circ \varphi_{\text{comp}} = \varphi_{\text{comp}} \circ (\rho^{\{\text{verbo}\}}_{\{U,V\}} \times \rho^{\{\text{argomento}\}}_{\{U,V\}})$$

Specializzare il contesto e poi comporre dà lo stesso risultato che comporre e poi specializzare.

### 10.5 Progressivo e Prospettivo: Operatori Aspettuali come Trasformazioni di Fasci

Il progressivo ("stare + gerundio" in italiano, "be + -ing" in inglese) è un operatore che trasforma predicati eventuali in predicati stativi che descrivono la situazione di essere in una fase interna dell'evento.

"Giovanni corre" (processuale)  $\rightarrow$  "Giovanni sta correndo" (stativo-progressivo)

Modelliamo il progressivo come operatore PROG che trasforma fasci eventuali:

PROG:  $F_{\text{evento}} \rightarrow F_{\text{stato}}$

Per ogni aperto  $U$ ,  $(\text{PROG } F_{\text{evento}})(U)$  contiene stati  $s$  dove:

- $s$  è localizzato a un tempo  $t$
- Esiste evento  $e$  con  $t \in T(e)$  ( $t$  è interno all'estensione temporale di  $e$ )
- $s$  descrive la situazione:  $e$  è in corso al tempo  $t$ , ma non necessariamente completo

Le mappe di restrizione per PROG  $F_{\text{evento}}$  riflettono che restringere temporalmente un progressivo focalizza su una fase specifica del processo in corso.

Proprietà del Progressivo (Paradosso Imperfettivo): Da "Giovanni sta attraversando la strada" NON segue logicamente "Giovanni ha attraversato la strada" (potrebbe essere interrotto prima del completamento).

Questo contrasta con eventi telici non progressivi: Da "Giovanni attraversò la strada" (perfettivo telico) SEGUE "Giovanni ha attraversato la strada" (completamento implicato).

Formalizziamo: se  $e \in F_{\text{telic}}(U)$  e  $t \in T(e)$  ma  $t$  precede  $\text{cul}$  (la culminazione), allora  $\text{PROG}(e)(t)$  è vero, ma non implica che  $\text{cul}$  sia raggiunto. La restrizione alla fase  $[\text{inizio}(e), t]$  NON contiene la culminazione, quindi il progressivo non implica completamento.

Il prospettivo ("stare per + infinito") descrive uno stato dove un evento è imminente ma non ancora iniziato:

"Giovanni sta per partire" - lo stato corrente precede immediatamente l'inizio di  $e_{partire}$

PROSP:  $F_{evento} \rightarrow F_{stato}$  dove  $(PROSP F_{evento})(U)$  contiene stati  $s$  dove:

- $s$  è localizzato a tempo  $t$
- Esiste evento  $e$  con  $t < \min(T(e))$  ( $t$  precede l'inizio di  $e$ )
- La distanza temporale  $t - \min(T(e))$  è piccola (imminenza contestuale)
- Fattori causali per l'inizio di  $e$  sono presenti a  $t$

### 10.6 Fasci su Strutture di Reichenbach: Tempo, Riferimento, Evento

Hans Reichenbach analizza i tempi verbali attraverso tre punti temporali:

- $S$  (Speech time): tempo di enunciazione
- $R$  (Reference time): tempo di riferimento
- $E$  (Event time): tempo dell'evento

Diverse combinazioni di ordinamenti tra  $S$ ,  $R$ ,  $E$  producono tempi verbali diversi:

Passato semplice:  $E < R = S$  (evento prima di riferimento che coincide con enunciazione)

Trapassato prossimo:  $E < R < S$  (evento prima di riferimento che precede enunciazione)

Futuro anteriore:  $S < E < R$  (enunciazione prima di evento che precede riferimento futuro)

Modelliamo questo con uno spazio topologico  $(T \times T \times T, \tau)$  dove ogni punto  $(s, r, e)$  specifica valori di  $S$ ,  $R$ ,  $E$ . La topologia riflette continuità temporale e relazioni d'ordine.

Il fascio  $F_{tempo}$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq T^3$  interpretazioni temporali che rispettano configurazioni  $S$ - $R$ - $E$ :

$F_{tempo}(U) = \{\sigma : U \rightarrow \text{Interpretazioni tali che } \sigma(s,r,e) \text{ specifica tempo verbale appropriato per configurazione } (s,r,e)\}$

Le mappe di restrizione modellano come interpretazioni temporali si specializzano fissando alcuni parametri. Per esempio:

$\rho_{\{U_{generale}, U_{S\_fisso}\}}$ : restringere a  $U_{S\_fisso}$  dove  $s$  è costante modella il passaggio da discussione meta-temporale a enunciazione in un momento specifico.

## Capitolo 11: Presupposizioni Proiettive e Filtri di Annullamento

Approfondiamo la teoria delle presupposizioni oltre quanto discusso precedentemente, modellando in dettaglio fenomeni di proiezione, filtri, e annullamento presupposizionale.

### 11.1 Presupposizioni come Sotto-Fasci Rigidi: Formalizzazione Completa

Abbiamo introdotto l'idea che presupposizioni formano sotto-fasci rigidi del fascio semantico complessivo. Formalizziamo rigorosamente.



Sia  $F\_sem$  il fascio semantico completo che assegna a ogni contesto  $c$  l'interpretazione semantica totale di un enunciato, includendo asserzioni, presupposizioni, implicature. Definiamo:

$F\_presup \subseteq F\_sem$  come sotto-fascio dove per ogni aperto  $U$ :

$$F\_presup(U) = \{\text{componenti presupposizionali di sezioni in } F\_sem(U)\}$$

Formalmente, se  $s \in F\_sem(U)$  decompone come  $s = (s\_assert, s\_presup, s\_implic)$ , allora  $s\_presup \in F\_presup(U)$ .

La rigidità di  $F\_presup$  rispetto a trasformazioni sintattiche  $\tau$  significa:

$$\tau^*(F\_presup) \cong F\_presup$$

dove  $\tau^*$  è il pullback (immagine inversa) indotto dalla trasformazione  $\tau$ . Per  $\tau\_neg$  (negazione):

$$\tau\_neg^*(F\_presup) \cong F\_presup$$

Questo cattura formalmente che presupposizioni si proiettano invariate attraverso negazione.

## 11.2 Filtri Presupposizionali e Mappe di Annullamento

Non tutte le presupposizioni si proiettano sempre. Esistono contesti e costruzioni sintattiche che fungono da "filtri" presupposizionali, bloccando o modificando la proiezione.

**Filtro della Congiunzione:** "Giovanni ha smesso di fumare e Maria ha smesso di fumare" presuppone che entrambi fumavano.

Ma: "Se Giovanni fumava, allora ha smesso di fumare" NON presuppone necessariamente che Giovanni fumava (la presupposizione del conseguente è "filtrata" dall'antecedente condizionale che afferma la stessa proposizione).

Modelliamo filtri come morfismi:

$$\phi\_filter: F\_presup(U\_embedded) \rightarrow F\_presup(U\_matrix)$$

che mappa presupposizioni dell'enunciato embedded a presupposizioni che si proiettano al livello matrix.  $\phi\_filter$  può essere:

- Identità (proiezione completa)
- Mappa nulla (filtro completo, nessuna proiezione)
- Mappa parziale (alcune presupposizioni proiettano, altre no)

Per il condizionale "Se  $P$  allora  $Q$ ":

- Presupposizioni di  $P$  proiettano completamente
- Presupposizioni di  $Q$  sono filtrate se  $P$  afferma o implica le stesse proposizioni

- Formalmente:  $\varphi_{\text{filter}}^{\text{cond}}(\text{presup\_Q}) = \text{presup\_Q} \setminus (\text{asserzioni\_P} \cup \text{implicazioni\_P})$

### 11.3 Accommodation Locale e Globale: Sheafification Presupposizionale

Quando una presupposizione non è nel common ground, può essere "accomodata" - aggiunta retroattivamente al common ground per rendere l'enunciato felice.

L'accomodazione può avvenire:

- Localmente: solo nel contesto immediato dell'enunciato
- Globalmente: a livello del discorso complessivo
- Intermedia: a livelli strutturali intermedi

Modelliamo accomodazione come sheafification locale o aggiustamento del fascio del common ground.

Sia  $F_{CG}$  il fascio del common ground, assegnando a ogni contesto  $c$  l'insieme  $CG(c)$  di proposizioni mutuamente credute in  $c$ . Quando un enunciato introduce presupposizione  $p \notin CG(c)$ , abbiamo due opzioni:

**Rifiuto:** Segnalare infelicità ("Ehi, aspetta, non sapevo che...")

**Accomodazione:** Aggiornare  $F_{CG}$  aggiungendo  $p$

L'accomodazione globale corrisponde a definire:

$$F_{CG}^+ = \text{sheafification di } F_{CG} \cup \{p\}$$

dove estendiamo  $F_{CG}$  per includere  $p$  in modo coerente topologicamente. Se  $p$  è compatibile con tutte le sezioni locali esistenti, la sheafification riesce. Se  $p$  contraddice informazioni in qualche aperto, la sheafification produce un fascio diverso o fallisce, segnalando incompatibilità.

L'accomodazione locale corrisponde a aggiornare solo su un aperto piccolo  $U_{\text{local}} \ni c$  senza propagare globalmente:

$$F_{CG}(U_{\text{local}}) \mapsto F_{CG}(U_{\text{local}}) \cup \{p\}$$

Questo crea potenzialmente un prefascio che non soddisfa la condizione di fascio (incoerenza tra locale e globale), riflettendo tensione tra accomodazione locale e coerenza globale.

### 11.4 Presupposizioni Soft vs Hard: Gradiente di Rigidità

Linguisti distinguono presupposizioni "hard" (rigide, difficili da cancellare o sospendere) e "soft" (più flessibili, facilmente cancellabili in contesti appropriati).

Hard: "Giovanni ha smesso di fumare" → presupposizione hard che Giovanni fumava  
Soft: "Giovanni è consapevole che è tardi" → presupposizione soft che è tardi (più facilmente cancellabile o sospendibile in contesti epistemici complessi)

Modelliamo questo come gradiente di rigidità del sotto-fascio:

$$F_{\text{presup}}^{\text{hard}} \subset F_{\text{presup}}^{\text{soft}} \subseteq F_{\text{sem}}$$

dove  $F_{\text{presup}}^{\text{hard}}$  è massimalmente rigido (invariante sotto quasi tutte le trasformazioni), mentre  $F_{\text{presup}}^{\text{soft}}$  è parzialmente rigido (invariante sotto molte ma non tutte le trasformazioni).

Formalmente, per trasformazione  $\tau$ :

- Se  $p \in F_{\text{presup}}^{\text{hard}}$ , allora  $\tau^*(p) = p$  (sempre)
- Se  $p \in F_{\text{presup}}^{\text{soft}}$ , allora  $\tau^*(p) = p$  solo per  $\tau$  in sottoinsieme proprio di trasformazioni

Il grado di rigidità è misurabile:  $|\{\tau : \tau^*(p) = p\}| / |\text{Trasformazioni rilevanti}|$

## Capitolo 12: Vagueness, Borderline Cases e Topologia Fuzzy

La vaghezza linguistica (vagueness) - il fenomeno per cui predicati hanno casi borderline senza membership chiara - può essere modellata attraverso fasci fuzzy su spazi topologici con struttura graduata.

### 12.1 Predicati Vaghi e Spazi di Sorites

Predicati come "alto", "calvo", "rosso", "mucchio" sono vaghi: ammettono casi chiari positivi, casi chiari negativi, e casi borderline ambigui. La vaghezza genera paradossi di sorites:

1. Un uomo con 0 capelli è calvo
2. Se un uomo con  $n$  capelli è calvo, un uomo con  $n+1$  capelli è calvo
3. Quindi un uomo con 100.000 capelli è calvo (assurdo!)

La premessa 2 è la problematica: sembra plausibile localmente (un capello in più non fa differenza), ma ripetuta porta ad assurdità.

Modelliamo predicati vaghi attraverso fasci fuzzy. Sia  $X$  uno spazio di individui ordinati lungo dimensione rilevante (numero capelli, altezza, ecc.). La topologia riflette "vicinanza" lungo questa dimensione.

Il fascio fuzzy  $F_{\text{calvo}}$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq X$  funzioni di membership graduata:

$F_{\text{calvo}}(U) = \{\mu : U \rightarrow [0,1] \text{ tali che } \mu(x) = \text{grado di calvizie di } x, \text{ con } \mu \text{ continua o semi-continua}\}$

Per  $x$  con 0 capelli:  $\mu(x) = 1$  (completamente calvo) Per  $x$  con 100.000 capelli:  $\mu(x) = 0$  (completamente non calvo) Per  $x$  con 5.000 capelli:  $\mu(x) \approx 0,6$  (caso borderline, moderatamente calvo)

La continuità di  $\mu$  cattura l'intuizione che un capello in più fa differenza minima: se  $x$  e  $y$  differiscono minimamente, allora  $|\mu(x) - \mu(y)|$  è piccolo.

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}$  per  $V \subseteq U$  restringono funzioni di membership al sotto-dominio  $V$ , preservando valori graduati.

## 12.2 Contesti di Precisificazione e Supersvaluzionismo

Il supersvaluzionismo (Fine, 1975) propone che predicati vaghi siano resi precisi attraverso precisificazioni contestuali. Ogni precisificazione è un modo ammissibile di "rendere netto" il confine vago.

Modelliamo precisificazioni come sezioni di un fascio su spazio di contesti. Sia  $C$  lo spazio di contesti valutativi. Per ogni  $c \in C$ , il contesto specifica una precisificazione  $\rho_c$  del predicato vago.

$F_{\text{precis}}(U) = \{\text{famiglie } \{\rho_c\}_{c \in U} \text{ di precisificazioni, una per ogni } c \in U, \text{ varianti continuamente}\}$

Una proposizione  $\phi$  è:

- Super-vera: vera in tutte le precisificazioni
- Super-falsa: falsa in tutte le precisificazioni
- Indeterminata: vera in alcune, falsa in altre

Le mappe di restrizione modellano come restringere lo spazio di precisificazioni ammissibili. Specializzando il contesto (restringendo  $U$ ), possiamo eliminare alcune precisificazioni, riducendo indeterminazione.

## 12.3 Degree Theory e Fuzzy Sheaves: Algebra dei Gradi

Alternativamente, la degree theory tratta vaghezza attraverso gradi di verità in logica fuzzy. Proposizioni non sono semplicemente vere o false ma vere a grado  $\alpha \in [0,1]$ .

I fasci fuzzy  $F$  assegnano a ogni aperto  $U$  funzioni a valori in  $[0,1]$ :

$F(U) = \{s : U \rightarrow [0,1] \text{ tali che } s \text{ è (semi-)continua}\}$

Le operazioni logiche diventano operazioni su gradi:

- Negazione:  $\neg \alpha = 1 - \alpha$
- Congiunzione:  $\alpha \wedge_{\text{fuzzy}} \beta = \min(\alpha, \beta)$  (o t-norme alternative)
- Disgiunzione:  $\alpha \vee_{\text{fuzzy}} \beta = \max(\alpha, \beta)$  (o t-conorme)

Le mappe di restrizione sono funzioni che preservano struttura graduata:

$\rho_{\{U,V\}}(s) = s|_V$  dove  $s|_V : V \rightarrow [0,1]$  è restrizione funzionale

Composizionalità fuzzy: se  $\phi$  e  $\psi$  sono proposizioni con gradi  $\alpha(c)$  e  $\beta(c)$  nel contesto  $c$ , allora:

$$[[\varphi \wedge \psi]](c) = [[\varphi]](c) \wedge_{\text{fuzzy}} [[\psi]](c) = \min(\alpha(c), \beta(c))$$

Le sezioni del fascio rispettano questa composizionalità.

## 12.4 Tolerance Relations e Non-Transitività della Similarità

Un aspetto profondo della vaghezza è che relazioni di similarità percettiva (tolerance) sono simmetriche e riflessive ma NON transitive:

$x \approx y$  (x simile a y)  $y \approx z$  (y simile a z) Ma NON necessariamente  $x \approx z$

Questa non-transitività genera paradossi sorites: procedendo per piccoli passi tollerabili, accumuliamo differenza grande.

Modelliamo tolerance topologicamente. Definiamo per ogni x uno intorno di tolleranza:

$$T_x = \{y : x \approx y\} = \text{insieme di individui indistinguibili da } x$$

Questi intorni NON formano base di topologia transitiva (non chiusi sotto composizione). Formano invece una pretopologia o topologia non-standard.

Il fascio di equivalenza fuzzy  $F_{\approx}$  assegna:

$$F_{\approx}(U) = \{\text{relazioni fuzzy } R : U \times U \rightarrow [0,1] \text{ simmetriche, riflessive, ma non necessariamente transitive}\}$$

Catturando relazioni di similarità graduata senza imporre transitività artificiale.

# Capitolo 13: Atti Linguistici e Forza Illocutiva: Fasci Pragmatici

La teoria degli atti linguistici di Austin e Searle distingue contenuto proposizionale (locuzione) da forza illocutiva (come il contenuto è presentato: asserzione, domanda, ordine, promessa). Modelliamo questa distinzione attraverso fasci con struttura duplice.

## 13.1 Spazio delle Forze Illocutive e Topologia Pragmatica

Definiamo uno spazio F di forze illocutive possibili. Una classificazione base include:

- Assertivi: affermazioni, asserzioni, descrizioni (scopo: rappresentare mondo)
- Direttivi: ordini, richieste, comandi, suggerimenti (scopo: far fare qualcosa all'ascoltatore)
- Commissivi: promesse, giuramenti, impegni (scopo: impegnarsi a azione futura)
- Espressivi: scuse, ringraziamenti, congratulazioni (scopo: esprimere stato psicologico)
- Dichiarativi: battesimi, sentenze, dichiarazioni ufficiali (scopo: creare stato di cose mediante enunciazione)

La topologia su F riflette relazioni di similarità e inclusione tra forze. Per esempio:

- "Ordinare" e "richiedere fortemente" sono forze vicine topologicamente (entrambe direttive ad alta imposizione)
- "Suggerire" è più distante da "ordinare" (direttivo debole vs forte)
- "Asserire" e "ordinare" sono in componenti connesse distinte (assertivo vs direttivo)

Aperti rappresentano "famiglie coerenti" di forze:

- $U_{\text{direttivo}} = \{\text{ordine, richiesta, suggerimento, ...}\}$
- $U_{\text{alta\_imposizione}} = \{\text{ordine, esigere, comandare, ...}\}$
- $U_{\text{direttivo}} \cap U_{\text{alta\_imposizione}} = \{\text{ordine, esigere, comandare}\}$

### 13.2 Fascio degli Atti Linguistici: Decomposizione Forza-Contenuto

Un atto linguistico completo decompone in forza illocutiva e contenuto proposizionale:

Atto = (Forza, Contenuto)

Definiamo fascio  $F_{\text{atto}}$  su spazio prodotto  $C \times F$  (contesti  $\times$  forze):

$F_{\text{atto}}(U \times V) = \{\text{funzioni } \alpha : U \times V \rightarrow (\text{Proposizioni} \times \text{Condizioni\_felicità})\}$

dove per ogni  $(c, f) \in U \times V$ ,  $\alpha(c, f)$  specifica:

- Contenuto proposizionale  $p$  appropriato per forza  $f$  nel contesto  $c$
- Condizioni di felicità che devono sussistere affinché l'atto con forza  $f$  e contenuto  $p$  sia felice (appropriato, riuscito) in  $c$

Le condizioni di felicità variano con la forza:

Per Assertivi: il parlante deve credere  $p$ , avere evidenza per  $p$  Per Direttivi: il parlante desidera che l'ascoltatore faccia  $p$ , l'ascoltatore è capace di fare  $p$ , non è ovvio che l'ascoltatore farà  $p$  spontaneamente Per Commissivi: il parlante intende fare  $p$ , il parlante è capace di fare  $p$  Per Espressivi: il parlante ha lo stato psicologico rilevante (è grato, dispiaciuto, felice) Per Dichiarativi: il parlante ha autorità istituzionale, il contesto è appropriato (cerimonia, tribunale)

Le mappe di restrizione modellano specializzazione:

$\rho_{\{(U_1, V_1), (U_2, V_2)\}}: F_{\text{atto}}(U_1 \times V_1) \rightarrow F_{\text{atto}}(U_2 \times V_2)$  per  $U_2 \subseteq U_1, V_2 \subseteq V_1$

Restringere contestualmente ( $U_1 \rightarrow U_2$ ) e restringere le forze ammissibili ( $V_1 \rightarrow V_2$ ) specializza atti e condizioni di felicità.

### 13.3 Atti Indiretti e Morfismi Tra Livelli Illocutivi

Gli atti linguistici indiretti hanno forza illocutiva superficiale diversa dalla forza intesa:

Superficiale: "Puoi passarmi il sale?" (interrogativa, apparentemente richiesta di informazione) Intesa: (Direttiva, richiesta di azione)

Modelliamo questo attraverso morfismi:

$\varphi_{\text{indiretto}}: F_{\text{atto}}^{\{\text{superficie}\}} \rightarrow F_{\text{atto}}^{\{\text{intenzione}\}}$

che mappa atti di forza superficiale ad atti di forza intesa. Per ogni contesto  $c$ :

$\varphi_{\text{indiretto}}(c)(\text{interrogativa\_capacità}) = \text{direttiva\_richiesta}$

Questo morfismo dipende criticamente dal contesto. In contesti cooperativi standard, interrogative sulla capacità di azione si interpretano regolarmente come richieste indirette. In contesti non-cooperativi o informativi puri, potrebbero essere interrogative letterali.

Le mappe di restrizione contestuale interagiscono:

$\rho^{\{\text{intenzione}\}}\{U, V\} \circ \varphi_{\text{indiretto}}, U = \varphi_{\text{indiretto}}, V \circ \rho^{\{\text{superficie}\}}\{U, V\}$

Interpretare indirettamente e poi specializzare il contesto = specializzare e poi interpretare indirettamente.

### 13.4 Performativi Espliciti: Auto-Referenzialità e Strutture Ricorsive

Gli enunciati performativi espliciti contengono verbi performativi che nominano l'atto che compiono:

"Ti prometto che verrò" - compie la promessa nominandola "Ti ordino di uscire" - compie l'ordine nominandolo "Ti battezzo Maria" - compie il battesimo nominandolo (dichiarativo)

Questi enunciati hanno struttura auto-referenziale: l'enunciato e stesso fa riferimento all'atto linguistico che e costituisce. Formalmente:

$e = \text{atto}(e, \text{contenuto})$

dove  $\text{atto}(e, p)$  è funzione che prende l'enunciato stesso come argomento.

Modelliamo auto-referenzialità attraverso punti fissi in fasci. Cerchiamo sezione  $s \in F_{\text{atto}}(U)$  tale che:

$s(c) = (\text{forza}_f, \text{proposizione\_che\_menziona}_s)$

Questo è punto fisso di operatore:

$\Phi(s) = (f, \text{"l'enunciato } s \text{ ha forza } f \text{ e contenuto } p")$

I punti fissi esistono sotto condizioni appropriate (teorema del punto fisso di Banach in spazi metrici completi, o costruzioni categoriali di punti fissi).

L'auto-referenzialità generica genera problemi (paradossi tipo liar), ma performativi espliciti sono auto-referenziali "benigni" perché la referenza è costruttiva, non contraddittoria.

### 13.5 Forza Illocutiva Default e Contesti Marcati/Non-Marcati

In assenza di marcatori espliciti (verbi performativi, intonazione, particelle illocutive), gli enunciati ricevono forza illocutiva default contestualmente determinata.

Enunciato dichiarativo semplice: "Piove"

- Contesto standard conversazionale: forza assertiva (asserzione informativa)
- Contesto di risposta a domanda "Che tempo fa?": forza assertiva responsiva
- Contesto di preoccupazione per pioggia: possibile espressiva (disappunto)
- Contesto di bambino che impara: possibile direttiva ("guarda, sta piovendo" = attira attenzione)

Il fascio  $F_{\text{forza\_default}}$  assegna:

$F_{\text{forza\_default}}(U) = \{\text{funzioni } d : U \rightarrow F \text{ che assegnano a ogni contesto } c \in U \text{ la forza illocutiva default per forma sintattica data}\}$

Le mappe di restrizione catturano come la forza default si specializzi. In contesti generali, la forza default per dichiarative è assertiva. Restringendo a contesti espressivi (discussione di emozioni), la forza default potrebbe diventare espressiva.

## Capitolo 14: Prosodia, Intonazione e Interfaccia Fonetica-Semantica

La prosodia (intonazione, ritmo, accento) contribuisce essenzialmente al significato, modulando interpretazioni semantiche e pragmatiche. Modelliamo questa interfaccia attraverso fasci su spazi prosodici.

### 14.1 Spazio Prosodico e Topologia delle Curve Intonazionali

Definiamo spazio  $P$  di contorni prosodici possibili. Un contorno prosodico  $\pi \in P$  specifica:

- Curva di pitch (frequenza fondamentale)  $f_0(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  (Hz)
- Curva di intensità  $I(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$  (dB)
- Curva di durata (timing di sillabe, pause)
- Posizione di accenti tonici e enfatici

La topologia su  $P$  è indotta da distanze su curve:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \int_0^T |f_0^{(1)}(t) - f_0^{(2)}(t)|^2 dt + \int_0^T |I^{(1)}(t) - I^{(2)}(t)|^2 dt + \dots$$

Contorni prosodici vicini ( $d$  piccolo) sono percettivamente simili. La topologia cattura continuità percettiva: piccole variazioni prosodiche producono piccoli cambiamenti interpretativi.

Aperti rappresentano "regioni prosodiche":

- $U_{\text{interrogativo}}$  = contorni con pitch finale crescente tipico di domande
- $U_{\text{dichiarativo}}$  = contorni con pitch finale discendente tipico di asserzioni
- $U_{\text{enfatico}}$  = contorni con accenti tonici prominenti

### 14.2 Fascio della Forza Illocutiva Prosodica



La prosodia segnala o modula forza illocutiva. Definiamo fascio  $F\_forza\_pros$  su spazio  $P$ :

$F\_forza\_pros(U) = \{\text{assegnazioni } s : U \rightarrow \text{Forze\_illocutive} \text{ tali che } s(\pi) \text{ è la forza segnalata dal contorno } \pi \in U\}$

Esempi:

- Pitch finale crescente + segnala interrogativa:  $s(\pi) = \text{interrogativa}$  per  $\pi \in U\_interrogativo$
- Pitch finale discendente ↓ segnala dichiarativa:  $s(\pi) = \text{dichiarativa}$  per  $\pi \in U\_dichiarativo$

Ma la mappatura non è deterministica. Lo stesso contorno può segnalare forze diverse in contesti diversi. Quindi definiamo morfismo contestualmente modulato:

$\varphi\_pros: F\_forza\_pros \otimes F\_contesto \rightarrow F\_forza\_effettiva$

che combina segnali prosodici e contesto per determinare forza illocutiva effettiva.

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F\_forza\_pros(U) \rightarrow F\_forza\_pros(V)$  per  $V \subseteq U$  specializzano interpretazioni prosodiche. Restringendo a una sotto-famiglia di contorni, la mappatura forza diventa più determinata.

### 14.3 Focus Informativa e Strutture di Alternative

L'accento prosodico marca focus informativa, indicando quale parte dell'enunciato risponde alla Question Under Discussion o contrasta con alternative.

"GIOVANNI ha mangiato la mela" (accento su Giovanni)

- Focus: Giovanni (non altri)
- Presuppone: qualcuno ha mangiato la mela
- Risponde a QUD: "Chi ha mangiato la mela?"
- Evoca alternative: {Maria ha mangiato la mela, Pietro ha mangiato la mela, ...}

"Giovanni ha mangiato LA MELA" (accento su mela)

- Focus: la mela (non altro frutto)
- Presuppone: Giovanni ha mangiato qualcosa
- Risponde a QUD: "Cosa ha mangiato Giovanni?"
- Evoca alternative: {Giovanni ha mangiato la pera, ... la banana, ...}

Modelliamo focus attraverso fascio  $F\_focus$  che assegna a ogni contorno prosodico  $\pi$  la struttura focus-presupposizione:

$F\_focus(U) = \{s : U \rightarrow (\text{Costituente\_focus} \times \text{Proposizione\_presupposta} \times \text{Set\_alternative})\}$

Le mappe di restrizione propagano strutture di focus coerentemente attraverso variazioni prosodiche.

La semantica alternativa (Rooth) modella focus formalmente attraverso valori ordinari e valori di focus:

$[[\varphi]]^o$  = valore semantico ordinario  $[[\varphi]]^f$  = insieme di alternative generate dal focus

Il fascio  $F\_focus$  incorpora entrambi:

$$F\_focus(U)(\pi) = ([[\varphi]]^o(\pi), [[\varphi]]^f(\pi))$$

dove  $\pi$  determina posizione del focus quindi quali alternative sono evocate.

#### 14.4 Emozioni, Attitudini e Prosodia Affettiva

La prosodia esprime anche stati affettivi e attitudini del parlante: gioia, tristezza, rabbia, ironia, sarcasmo, certezza, dubbio.

Prosodia gioiosa: pitch alto variabile, tempo veloce, intensità forte Prosodia triste: pitch basso monotono, tempo lento, intensità debole Prosodia ironica: esagerazione prosodica, pitch patterns marcati

Definiamo fascio  $F\_affetto$  su spazio prosodico  $P$ :

$F\_affetto(U) = \{s : U \rightarrow \text{Spazio\_affettivo} \text{ dove } s(\pi) \text{ specifica stato affettivo/attitudinale segnalato da } \pi\}$

Spazio\_*affettivo* può essere multi-dimensionale:

- Valenza (positivo-negativo)
- Arousal (attivazione alta-bassa)
- Dominanza (controllante-sottomesso)
- Autenticità (genuino-ironico)

Prosodia ironica è particolarmente interessante: segnali prosodici contraddicono contenuto letterale, forzando interpretazione non-letterale.

"Che BELLA giornata!" (con prosodia esageratamente entusiasta in giorno piovoso)

- Letterale: asserzione positiva
- Ironico (via prosodia): asserzione negativa mascherata, espressiva di disappunto

Morfismo di inversione ironica:

$$\varphi\_ironia: F\_sem^{\{letterale\}} \rightarrow F\_sem^{\{ironico\}}$$

segnalato da pattern prosodici specifici in  $F\_affetto$ .

## Capitolo 15: Spazi Multi-Agente e Fasci Epistemici Distribuiti

Quando molteplici agenti con stati epistemici diversi interagiscono comunicativamente, emerge struttura complessa di conoscenza distribuita, credenze mutue, common ground stratificato. Modelliamo questo attraverso fasci su spazi multi-agente.

### 15.1 Spazio degli Stati Multi-Agente

Sia  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  un insieme di agenti comunicanti. Lo spazio degli stati multi-agente è:

$$E = E_{a_1} \times E_{a_2} \times \dots \times E_{a_n}$$

dove  $E_{a_i}$  è lo spazio degli stati epistemici possibili per agente  $a_i$ . Un punto  $e \in E$  specifica configurazione completa  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  dove  $e_i \in E_{a_i}$  è stato epistemico di  $a_i$ .

La topologia prodotto su  $E$  ha aperti:

$$U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$$

dove  $U_i \subseteq E_{a_i}$ . Questi aperti rappresentano "regioni di compatibilità epistemica multi-agente".

### 15.2 Fascio della Conoscenza Comune (Common Knowledge)

Conoscenza comune di proposizione  $p$  tra agenti  $A$  significa:

- Tutti sanno  $p$
- Tutti sanno che tutti sanno  $p$
- Tutti sanno che tutti sanno che tutti sanno  $p$
- ... (infinitamente)

Formalmente,  $p$  è common knowledge sse  $p$  vale in tutti i mondi accessibili iterando operatori epistemici per tutti gli agenti arbitrariamente.

Definiamo fascio  $F_{CK}$  (common knowledge) su  $E$ :

$F_{CK}(U) = \{ \text{proposizioni } p \text{ tali che per ogni configurazione epistemica } e \in U \text{ e ogni sequenza finita di applicazioni di operatori } K_{a_i}, p \text{ rimane conosciuta} \}$

Le mappe di restrizione propagano common knowledge: se  $p$  è common knowledge in  $U$ , rimane tale in  $V \subseteq U$  (monotonicità della conoscenza comune).

Proprietà topologica:  $F_{CK}$  è fascio localmente costante su regioni appropriate - common knowledge è rigido (non varia localmente una volta stabilito in un aperto).

### 15.3 Public Announcements e Aggiornamento Dinamico

Quando un agente fa un annuncio pubblico di proposizione  $p$ , lo stato epistemico multi-agente si aggiorna:

$$e = (e_1, \dots, e_n) \mapsto e' = (e_1 + p, \dots, e_n + p)$$

dove  $e_i + p$  è lo stato epistemico di  $a_i$  aggiornato con informazione  $p$ .

Modelliamo public announcement come trasformazione:

$$\tau_{[p]}: E \rightarrow E$$

che mappa configurazioni pre-annuncio a configurazioni post-annuncio.

Il fascio epistemico si trasforma tramite pullback:

$$F_{\text{epist}} \mapsto \tau_{[p]}^*(F_{\text{epist}})$$

Le sezioni del fascio aggiornato riflettono nuovo stato epistemico distribuito dopo l'annuncio.

Proprietà: se  $p$  è annunciato pubblicamente,  $p$  diventa common knowledge. Formalmente:

$$\tau_{[p]}^*(F_{\text{CK}}) \supseteq F_{\text{CK}} \cup \{p\}$$

Il fascio di common knowledge si espande.

#### 15.4 Credenze di Ordine Superiore e Strutture Ricorsive

Gli agenti non solo hanno credenze ma anche credenze sulle credenze altrui (secondo ordine), credenze sulle credenze sulle credenze (terzo ordine), etc.

Agente  $a_1$  crede  $p$  (primo ordine):  $p \in \text{Bel}(a_1)$  Agente  $a_1$  crede che  $a_2$  crede  $p$  (secondo ordine):  $\text{Bel}_{\{a_2\}}(p) \in \text{Bel}(a_1)$  Agente  $a_1$  crede che  $a_2$  crede che  $a_1$  crede  $p$  (terzo ordine):  $\text{Bel}_{\{a_1\}}(p) \in \text{Bel}(a_2) \in \text{Bel}(a_1)$

Modelliamo credenze di ordine  $n$  attraverso fasci annidati:

$F_{\text{Bel}}^{\{(1)\}}$  = fascio di credenze primo ordine  $F_{\text{Bel}}^{\{(2)\}}$  = fascio di fascio di credenze secondo ordine  $F_{\text{Bel}}^{\{(n)\}}$  = fascio di ordine  $n$

La torre di fasci:

$$F_{\text{Bel}}^{\{(1)\}} \rightarrow F_{\text{Bel}}^{\{(2)\}} \rightarrow F_{\text{Bel}}^{\{(3)\}} \rightarrow \dots$$

ha limite (se esiste) che cattura struttura completa di credenze mutue infinite.

## Capitolo 16: Metafora Concettuale e Mappature Concettuali Cross-Domain

Le metafore concettuali (Lakoff & Johnson) mappano struttura da dominio sorgente a dominio target sistematicamente. Modelliamo queste mappature attraverso morfismi tra fasci definiti su spazi concettuali diversi.

### 16.1 Spazi Concettuali Sorgente e Target

Metafora ARGUMENT IS WAR mappa da dominio della guerra a dominio dell'argomentazione:

Sorgente (Guerra): attaccare, difendere, vincere, perdere, strategia, alleati, nemici Target (Argomentazione): criticare posizione, supportare posizione, convincere, essere sconfitto logicamente, tattica retorica, sostenitori, oppositori

Definiamo due spazi concettuali:

- $C_{\text{sorgente}}$  = spazio di concetti del dominio guerra
- $C_{\text{target}}$  = spazio di concetti del dominio argomentazione

Ciascuno è dotato di topologia riflettente relazioni concettuali (similarità, inclusione, contrapposizione).

## 16.2 Fascio delle Strutture Concettuali

Per ciascun dominio, definiamo fascio di strutture concettuali:

$F_{\text{guerra}}(U) = \{\text{strutture concettuali del dominio guerra rilevanti in regione } U \subseteq C_{\text{sorgente}}\}$

$F_{\text{argomento}}(V) = \{\text{strutture concettuali del dominio argomentazione rilevanti in regione } V \subseteq C_{\text{target}}\}$

Una struttura concettuale include:

- Entità (agenti, strumenti, locazioni)
- Relazioni (causali, partecipative, strumentali)
- Frame di eventi (sequenze tipiche, ruoli tematici)
- Valutazioni (positivo/negativo, desiderabile/indesiderabile)

## 16.3 Morfismo di Mappatura Metaforica

La metafora concettuale è morfismo:

$\varphi_{\text{met}}: F_{\text{guerra}} \rightarrow F_{\text{argomento}}$

che preserva struttura parzialmente:

- Entità sorgente  $\rightarrow$  Entità target (soldato  $\rightarrow$  argomentatore)
- Relazioni sorgente  $\rightarrow$  Relazioni target (attaccare  $\rightarrow$  criticare)
- Frame sorgente  $\rightarrow$  Frame target (battaglia  $\rightarrow$  dibattito)

Il morfismo rispetta topologia: concetti vicini nella sorgente si mappano a concetti vicini nel target, preservando relazioni di vicinanza concettuale.

La compatibilità con restrizioni garantisce sistematicità:

$$\rho^{\{\text{argomento}\}}\{V_1, V_2\} \circ \varphi_{\text{met}} = \varphi_{\text{met}} \circ \rho^{\{\text{guerra}\}}\{U_1, U_2\}$$

dove  $U_i$  e  $V_i$  sono aperti corrispondenti tramite la metafora.

## 16.4 Metafore Morte vs Vive: Gradiente di Attivazione

Metafore "morte" (lexicalized) non attivano più il dominio sorgente consapevolmente: "La gamba del tavolo" - "gamba" è metaforica (da corpo a mobile) ma lexicalizzata, non pensiamo al corpo

Metafore "vive" attivano esplicitamente il mapping: "Demolire l'argomento dell'avversario" - attiva consapevolmente dominio distruzione fisica

Modelliamo questo come grado di attivazione della mappa  $\varphi_{\text{met}}$ :

$\alpha$ : Contesti  $\rightarrow [0,1]$

dove  $\alpha(c) = 0$  significa metafora completamente morta (lessicalizzata),  $\alpha(c) = 1$  significa metafora completamente viva (attivazione massima del dominio sorgente).

Il fascio della mappatura metaforica  $F_{\varphi}$  assegna:

$F_{\varphi}(U) = \{(\varphi, \alpha) : \varphi \text{ è mapping concettuale, } \alpha : U \rightarrow [0,1] \text{ specifica attivazione per ogni } c \in U\}$

Le mappe di restrizione specializzano sia il mapping che il profilo di attivazione.

## Capitolo 17: Interfaccia Sintassi-Semantica nella Teoria dei Fasci - Derivazioni, Movimento e Binding

### 17.1 Derivazioni Sintattiche come Morfismi tra Fasci: Fondamenti Teorici

L'interfaccia tra sintassi e semantica rappresenta uno dei problemi più profondi e persistenti nella teoria linguistica contemporanea. Da un lato abbiamo le strutture sintattiche, oggetti formali governati da principi computazionali che determinano quali sequenze di elementi lessicali sono grammaticalmente ben formate in una lingua. Dall'altro lato abbiamo le interpretazioni semantiche, che assegnano a queste strutture sintattiche significati composizionali, condizioni di verità, denotazioni in modelli appropriati. La questione fondamentale è: come si connettono questi due livelli di rappresentazione? Come fa una struttura sintattica astratta, un albero di derivazione governato da principi puramente formali come Merge, Move, Agree, a determinare un'interpretazione semantica specifica e sistematica?

La tradizione generativista, da Chomsky in poi, ha postulato che esista un livello di rappresentazione chiamato Logical Form o LF, una struttura sintattica che costituisce l'input per l'interpretazione semantica. Le regole sintattiche generano strutture superficiali (Surface Structure o S-Structure), che vengono poi trasformate attraverso operazioni come Quantifier Raising, movimento del wh- in forma logica, ricostruzione, per produrre LF. Quest'ultima struttura viene poi interpretata composizionalmente da regole semantiche che associano a ciascun nodo sintattico una denotazione appropriata.

Tuttavia, questo modello presenta difficoltà concettuali e empiriche significative. Primo, la relazione tra S-Structure e LF non è sempre univoca: una stessa struttura superficiale può corrispondere a molteplici LF distinte, generando ambiguità di scopo, ambiguità di attaccamento, ambiguità quantificazionale. Secondo, molte operazioni sintattiche sembrano avere effetti semantici diretti che non sono facilmente riducibili a trasformazioni su LF. Terzo, la nozione stessa di LF come livello di rappresentazione autonomo è stata messa in discussione da approcci più recenti che favoriscono interpretazione ciclica o derivazionale, dove l'interpretazione semantica procede in parallelo con la derivazione sintattica piuttosto che applicarsi post-hoc a una struttura finale.

La teoria dei fasci offre un framework radicalmente diverso e potenzialmente più esplicativo per modellare l'interfaccia sintassi-semantica. L'idea centrale è che le derivazioni sintattiche stesse possano essere concepite non come semplici sequenze di operazioni che producono strutture statiche, ma come morfismi tra fasci definiti su spazi topologici appropriati. In questa prospettiva, una derivazione sintattica non è semplicemente un processo computazionale che trasforma un array lessicale in una struttura gerarchica attraverso applicazioni successive di Merge, ma è un morfismo funzionale che mappa sistematicamente strutture sintattiche locali a interpretazioni semantiche locali, rispettando vincoli di compatibilità topologica che garantiscono coerenza globale.

Formalizziamo questa intuizione con precisione. Sia  $X_{\text{syn}}$  uno spazio topologico i cui punti sono configurazioni sintattiche possibili, ovvero alberi di derivazione parziali o completi, strutture gerarchiche etichettate che rappresentano stadi della computazione sintattica. La topologia su  $X_{\text{syn}}$  è indotta da relazioni di inclusione e estensione tra derivazioni: due configurazioni sintattiche  $s_1$  e  $s_2$  sono topologicamente vicine se  $s_2$  estende  $s_1$  attraverso un numero piccolo di applicazioni di Merge, o se differiscono solo per scelte lessicali limitate mantenendo la stessa struttura scheletrica.

Più precisamente, definiamo una base topologica su  $X_{\text{syn}}$  dove gli aperti base sono insiemi della forma:

$$U_{\tau, L} = \{s \in X_{\text{syn}} : s \text{ ha struttura scheletrica } \tau \text{ e usa solo lessico in } L\}$$

dove  $\tau$  è uno "scheletro strutturale" (un albero con nodi etichettati per categorie sintattiche ma non per item lessicali specifici), e  $L$  è un sottinsieme del lessico complessivo della lingua. Questi aperti base catturano famiglie coerenti di derivazioni sintattiche che condividono architettura strutturale e pool lessicale.

Parallelamente, definiamo uno spazio topologico  $X_{\text{sem}}$  i cui punti sono interpretazioni semantiche possibili: denotazioni, condizioni di verità, rappresentazioni in qualche modello semantico appropriato (modelli possibili-mondi per semantica intensionale, modelli di teoria dei tipi per semantica categorial, spazi vettoriali per semantica distribuzionale, eccetera). La topologia su  $X_{\text{sem}}$  riflette similarità e compatibilità semantica: interpretazioni vicine denotano entità o proposizioni simili, condividono gran parte della loro struttura intensionale o estensionale.

Un fascio sintattico  $F_{\text{syn}}$  su  $X_{\text{syn}}$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq X_{\text{syn}}$  (una famiglia di configurazioni sintattiche) l'insieme delle possibili continuazioni o estensioni sintattiche ammissibili:

$F_{\text{syn}}(U) = \{\text{estensioni sintattiche } s' \text{ tali che per ogni } s \in U, s' \text{ estende o raffina } s \text{ in modo grammaticalmente legittimo}\}$

Le mappe di restrizione  $\rho_{U,V} : F_{\text{syn}}(U) \rightarrow F_{\text{syn}}(V)$  per  $V \subseteq U$  operano dimenticando informazione: restringere da una famiglia ampia  $U$  a una sottofamiglia  $V$  specializza le estensioni possibili ai casi compatibili con il sottoinsieme più ristretto.

Analogamente, un fascio semantico  $F_{\text{sem}}$  su  $X_{\text{sem}}$  assegna a ogni aperto  $W \subseteq X_{\text{sem}}$  l'insieme delle interpretazioni semantiche compatibili con la famiglia  $W$ :

$F_{\text{sem}}(W) = \{\text{interpretazioni } \sigma \text{ che sono coerenti con tutte le denotazioni in } W\}$

Con mappe di restrizione che specializzano interpretazioni a sotto-famiglie semantiche.

Ora, il cuore della proposta: una derivazione sintattica  $D$  che mappa configurazioni sintattiche a interpretazioni semantiche è modellata come morfismo di fasci:

$\Phi_D : F_{\text{syn}} \rightarrow F_{\text{sem}}$

Questo morfismo deve rispettare la struttura topologica di entrambi gli spazi. Formalmente, per ogni aperto  $U \subseteq X_{\text{syn}}$ , esiste una funzione:

$\Phi_{D,U} : F_{\text{syn}}(U) \rightarrow F_{\text{sem}}(f_D(U))$

dove  $f_D : X_{\text{syn}} \rightarrow X_{\text{sem}}$  è una funzione continua soggiacente che mappa configurazioni sintattiche a interpretazioni semantiche a livello dei punti base, e  $f_D(U)$  è l'immagine di  $U$  sotto questa funzione. La compatibilità con le mappe di restrizione richiede che per ogni inclusione  $V \subseteq U$ , il seguente diagramma commuti:

$$\begin{array}{ccc} F_{\text{syn}}(U) & \xrightarrow{\Phi_{D,U}} & F_{\text{sem}}(f_D(U)) \\ \downarrow \rho_{U,V} & & \downarrow \rho_{f_D(U),f_D(V)} \\ F_{\text{syn}}(V) & \xrightarrow{\Phi_{D,V}} & F_{\text{sem}}(f_D(V)) \end{array}$$

Questa commutatività esprime un principio profondo di composizionalità locale: interpretare sintassi e poi specializzare contestualmente produce lo stesso risultato che specializzare sintassi e poi interpretare. Non ci sono "salti interpretativi" discontinui o imprevedibili; l'interpretazione varia smoothly, topologicamente in modo continuo, con variazioni sintattiche.

Consideriamo un esempio concreto illuminante. La derivazione sintattica della frase "Giovanni legge ogni libro" procede approssimativamente attraverso i seguenti stadi (nella tradizione minimalista):

1. Numeration: {Giovanni, legge, ogni, libro} - l'array lessicale iniziale
2. Merge(ogni, libro)  $\rightarrow$  [DP ogni libro]
3. Merge(legge, [DP ogni libro])  $\rightarrow$  [VP legge [DP ogni libro]]
4. Merge(Giovanni, [VP legge [DP ogni libro]])  $\rightarrow$  [TP Giovanni [VP legge [DP ogni libro]]]

Ciascuno di questi stadi è un punto nello spazio  $X_{\text{syn}}$ . La derivazione completa forma una catena  $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3 \rightarrow s_4$  dove ogni  $s_{i+1}$  estende  $s_i$  attraverso un'applicazione di Merge.



Il morfismo  $\Phi_D$  assegna interpretazioni semantiche a ciascuno stadio:

$\Phi_D(s_1) = \{\text{giovanni, legge, ogni, libro}\}$  - denotazioni lessicali atomiche  $\Phi_D(s_2) = \lambda P. \forall x[\text{libro}(x) \rightarrow P(x)]$  - interpretazione del quantificatore "ogni libro"  $\Phi_D(s_3) = \lambda y. \forall x[\text{libro}(x) \rightarrow \text{legge}(y,x)]$  - predicato che si applicherà al soggetto  $\Phi_D(s_4) = \forall x[\text{libro}(x) \rightarrow \text{legge}(\text{giovanni},x)]$  - proposizione completa

La compatibilità del morfismo garantisce che restringere la derivazione a uno stadio intermedio e interpretare produce una sotto-interpretazione coerente con l'interpretazione finale. Per esempio, se restringiamo da  $s_4$  a  $s_3$  (dimenticando il soggetto Giovanni), otteniamo la restrizione dell'interpretazione finale da una proposizione a un predicato monadico.

Ma la potenza reale di questo approccio emerge quando consideriamo fenomeni più complessi come ambiguità di scopo quantificazionale. Consideriamo:

"Ogni studente ha letto un libro"

Questa frase ammette due letture:

Lettura 1 (scopo largo di "ogni"):  $\forall x[\text{studente}(x) \rightarrow \exists y[\text{libro}(y) \wedge \text{legge}(x,y)]]$  "Per ogni studente  $x$ , esiste (possibilmente diverso) un libro  $y$  che  $x$  ha letto"

Lettura 2 (scopo largo di "un"):  $\exists y[\text{libro}(y) \wedge \forall x[\text{studente}(x) \rightarrow \text{legge}(x,y)]]$  "Esiste un (particolare) libro  $y$  tale che ogni studente  $x$  ha letto  $y$ "

Nell'approccio tradizionale via LF, questa ambiguità è modellata postulando due LF distinte ottenute attraverso Quantifier Raising in ordini diversi. Ma nella teoria dei fasci, possiamo modellare l'ambiguità in modo più geometrico ed elegante.

Le due letture corrispondono a due diversi morfismi  $\Phi_{D_1}$  e  $\Phi_{D_2}$  dalla stessa struttura sintattica superficiale a interpretazioni semantiche diverse. Non è che ci siano due LF sintatticamente distinte; piuttosto, c'è una singola configurazione sintattica (o più precisamente, una famiglia di configurazioni topologicamente vicine) che ammette molteplici morfismi interpretativi verso lo spazio semantico.

Più formalmente, sia  $U_{\text{surf}} \subseteq X_{\text{syn}}$  l'aperto contenente tutte le configurazioni sintattiche della frase con la stessa struttura superficiale. Esistono due morfismi distinti:

$$\Phi_1 : F_{\text{syn}}(U_{\text{surf}}) \rightarrow F_{\text{sem}}(W_1) \quad \Phi_2 : F_{\text{syn}}(U_{\text{surf}}) \rightarrow F_{\text{sem}}(W_2)$$

dove  $W_1$  e  $W_2$  sono regioni semantiche distinte corrispondenti alle due letture. Questi morfismi differiscono nell'ordine in cui compongono le interpretazioni dei quantificatori. Topologicamente,  $W_1$  e  $W_2$  potrebbero essere disgiunti (se le letture sono semanticamente incompatibili) o sovrapporsi parzialmente (se esistono contesti dove entrambe le letture sono simultaneamente vere).

La scelta tra  $\Phi_1$  e  $\Phi_2$  in un contesto particolare è determinata da fattori contestuali esterni alla sintassi pura: salienza, preferenze lessicali (certi quantificatori preferiscono scopi più larghi), struttura informazionale, conoscenze enciclopediche. Questi fattori possono essere

modellati come ulteriori componenti dello spazio contestuale complessivo che influenzano quale morfismo viene selezionato.

## 17.2 Movimento Sintattico e Tracce Semantiche: Catene e Persistenza Interpretativa

Il movimento sintattico, uno dei fenomeni più studiati e teorizzati nella grammatica generativa, pone sfide particolari per l'interfaccia sintassi-semantica. Quando un costituente sintattico si muove da una posizione di base a una posizione derivata (per esempio, movimento wh- in interrogative, scrambling, topicalizzazione, focalizzazione), quali sono le conseguenze semantiche? Il costituente mosso viene interpretato nella sua posizione di base, nella posizione superficiale, o in entrambe? Come si relazionano le "tracce" lasciate dal movimento all'interpretazione complessiva?

La teoria del Copy-and-Delete nella sintassi minimalista contemporanea propone che il movimento non è veramente spostamento ma copia: l'elemento mosso viene copiato nella posizione target, e una delle copie (tipicamente quella in posizione di base) viene poi cancellata alla PF (Phonological Form) ma può rimanere attiva alla LF per l'interpretazione. Questa architettura permette che costituenti mossi siano interpretati "in situ" semanticamente anche se pronunciati in posizione derivata.

Nella teoria dei fasci, possiamo modellare il movimento e le sue tracce in modo geometricamente più trasparente attraverso la nozione di catene sintattiche e fasci di dipendenze. Una catena sintattica è una sequenza di posizioni ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ ) dove  $\alpha_1$  è la posizione di base (theta-position dove viene assegnato ruolo tematico),  $\alpha_n$  è la posizione finale superficiale, e le posizioni intermedie  $\alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  sono posizioni di passaggio (landing sites di movimento successivo).

Formalizziamo questo attraverso uno spazio topologico  $X_{\text{chain}}$  le cui punti sono catene sintattiche possibili. La topologia su  $X_{\text{chain}}$  riflette relazioni di estensione e similarità tra catene: due catene sono vicine se condividono molte posizioni, se hanno archi di movimento simili, se coinvolgono tipi di costituenti simili.

Definiamo un fascio  $F_{\text{trace}}$  su  $X_{\text{chain}}$  che traccia le interpretazioni associate a ciascuna posizione nella catena:

$F_{\text{trace}}(U) = \{\text{assegnazioni } \tau : U \rightarrow (\text{Posizioni} \rightarrow \text{Interpretazioni}) \text{ tali che } \tau(\text{chain})(\text{pos}) \text{ specifica l'interpretazione semantica contribuita dalla posizione pos nella catena chain}\}$

Le mappe di restrizione  $\rho_{U,V}$  propagano interpretazioni traccia quando specializziamo a sotto-famiglie di catene.

Un principio fondamentale è la Persistenza Interpretativa delle Tracce: anche se una copia in posizione di base è cancellata foneticamente, la sua interpretazione semantica può persistere e contribuire alla composizione semantica complessiva. Questo è formalizzato richiedendo che il fascio  $F_{\text{trace}}$  sia "robusto" rispetto a cancellazioni fonetiche: eliminare posizioni dalla realizzazione fonetica non elimina necessariamente le corrispondenti sezioni dal fascio semantico.

Consideriamo il movimento wh- in interrogative. Nella frase:

"Quale libro ha letto Giovanni \_\_\_?"

La struttura superficiale ha "quale libro" in posizione Spec-CP (specificatore di Complementizer Phrase), ma sintatticamente e semanticamente c'è una catena che connette questa posizione alla posizione di base come oggetto del verbo "letto". La traccia \_\_\_ indica la posizione di base.

Nella teoria delle catene, abbiamo:

chain = (quale libro\_CP, \_\_\_oggetto)

Il fascio  $F_{\text{trace}}$  assegna interpretazioni a entrambe le posizioni:

$\tau(\text{chain})(\text{quale libro\_CP})$  = interrogativa, marca di scopo, operatore lambda che lega  
variabile  $\tau(\text{chain})(\text{___oggetto})$  = variabile legata, argomento del predicato "letto"

L'interpretazione complessiva combina contributi da entrambe le posizioni:

[CP [quale libro]<sub>i</sub> ha letto Giovanni t<sub>i</sub>]

Semanticamente:

$\lambda x.\text{libro}(x) \wedge \text{ha-letto}(\text{giovanni}, x)$

"Quale x tale che x è un libro e Giovanni ha letto x"

Il morfismo interpretativo  $\Phi_{\text{wh}}$  che processa movimento wh- mappa la catena a questa interpretazione combinata, rispettando il fatto che "quale libro" contribuisce il restrittore quantificazionale ("libro(x)") e il marcatore interrogativo, mentre la traccia contribuisce l'argomento al predicato verbale.

Le mappe di restrizione del fascio catturano come interpretazioni si specializzano quando consideriamo sotto-catene o catene con movimento parziale. Se interrompiamo il movimento a uno stadio intermedio (per esempio, in costruzioni di movimento successivo ciclico attraverso Spec-CP embedded), otteniamo interpretazioni intermedie che sono compatibili ma meno complete della interpretazione finale.

Un fenomeno più complesso è il movimento A-barra (A-bar movement) con ricostruzione semantica. In certi contesti, un costituente mosso può essere interpretato semanticamente "come se" fosse nella posizione di base, anche se è pronunciato in posizione derivata. Esempio:

"Quale foto di se stesso<sub>i</sub> ha Giovanni<sub>i</sub> distrutto \_\_\_?"

Il pronome riflessivo "se stesso" deve essere legato dal suo antecedente "Giovanni". Ma "quale foto di se stesso" è in Spec-CP, una posizione da cui non si può stabilire binding diretto. La soluzione è ricostruzione semantica: per scopi di binding, "quale foto di se stesso"

viene interpretato nella sua posizione di base (traccia), dove può essere c-comandato da "Giovanni" e quindi legato.

Nel framework dei fasci, la ricostruzione è modellata attraverso morfismi di proiezione:

$$\pi_{\text{recon}} : F_{\text{trace}}(\text{chain\_superficie}) \rightarrow F_{\text{trace}}(\text{chain\_ricostruita})$$

che mappa interpretazioni dalla catena superficiale a una catena "ricostruita" dove l'elemento mosso è semanticamente nella posizione di base per scopi di binding, anche se sintatticamente e foneticamente rimane in posizione derivata.

La compatibilità topologica di  $\pi_{\text{recon}}$  garantisce che la ricostruzione non introduce incoerenze: se una catena ammette ricostruzione, le interpretazioni ricostruite devono essere localmente compatibili con interpretazioni non-ricostruite su sovrapposizioni appropriate.

## 17.3 Teoria del Binding e Fasci di Dipendenze Anaforiche: Condizioni A, B, C come Vincoli Topologici

La teoria del binding, formulata classicamente attraverso le condizioni A, B, C di Chomsky, governa la distribuzione e l'interpretazione di anafore (pronomi riflessivi e reciproci), pronomi, e espressioni R (nomi e descrizioni definite). Queste condizioni specificano vincoli strutturali su quali antecedenti possono o devono legare quali elementi anaforici:

Condizione A: Un'anafora deve essere legata nel suo dominio locale (tipicamente la clausola minima che la contiene)

Condizione B: Un pronome deve essere libero nel suo dominio locale (non legato localmente, ma può essere legato da antecedenti esterni)

Condizione C: Un'espressione R deve essere libera ovunque (mai legata da nessun antecedente)

Tradizionalmente, queste condizioni sono formulate in termini di c-comando e domini di binding definiti configurazionalmente. Un elemento  $\alpha$  lega un elemento  $\beta$  se  $\alpha$  c-comanda  $\beta$ , è co-indicizzato con  $\beta$ , e si trova in una relazione strutturale appropriata.

La teoria dei fasci offre una reinterpretazione topologica profonda di queste condizioni, dove relazioni di binding emergono come vincoli di compatibilità locale in fasci di dipendenze anaforiche. L'idea centrale è che lo spazio sintattico non è uno spazio piatto di posizioni disconnesse, ma ha una ricca struttura topologica indotta da relazioni di c-comando, domini di località, barriere sintattiche. Le condizioni di binding si manifestano come restrizioni sulla continuità e la coerenza di morfismi tra fasci anaforici e fasci di antecedenti.

Formalizziamo accuratamente. Definiamo uno spazio topologico  $X_{\text{syn}}$  rappresentante tutte le configurazioni sintattiche possibili in una lingua data. La topologia  $\tau_{\text{syn}}$  su  $X_{\text{syn}}$  è generata da aperti della forma:

$U\_D = \{\text{posizioni sintattiche } \alpha : \alpha \text{ è contenuta nel dominio } D\}$

dove  $D$  è un dominio locale rilevante per il binding (TP, CP, DP, eccetera). Questi aperti catturano regioni sintattiche coerenti delimitata da confini categoriali.

Un punto  $\alpha \in X_{\text{syn}}$  rappresenta una posizione sintattica specifica in un albero di derivazione. L'insieme dei punti  $\beta$  che  $\alpha$  c-comanda forma un aperto nella topologia:

$U\_c\text{-com}(\alpha) = \{\beta \in X_{\text{syn}} : \alpha \text{ c-comanda } \beta\}$

Questo è un aperto perché c-comando è definito configurazionalmente in termini di relazioni strutturali che preservano apertura: se  $\alpha$  c-comanda  $\beta$  e  $\beta$  è contenuto in un dominio  $D$ , allora  $\alpha$  c-comanda tutti gli elementi in  $D$  che  $\beta$  contiene.

Definiamo ora fasci di elementi anaforici e antecedenti:

$F_{\text{anaphor}}(U) = \{\text{anafore (riflessivi, reciproci) che appaiono in posizioni contenute in } U\}$   
 $F_{\text{pronoun}}(U) = \{\text{pronomi che appaiono in posizioni contenute in } U\}$   
 $F_{\text{R-expr}}(U) = \{\text{espressioni } R \text{ che appaiono in posizioni contenute in } U\}$   
 $F_{\text{antecedent}}(U) = \{\text{potenziali antecedenti disponibili in } U\}$

Le mappe di restrizione  $\rho_{U,V}$  per  $V \subseteq U$  propagano elementi e antecedenti disponibili a sotto-regioni sintattiche.

Le condizioni di binding si formulano come vincoli su morfismi tra questi fasci:

Condizione A Topologica: Esiste un morfismo obbligatorio:

$\Phi_A : F_{\text{anaphor}} \rightarrow F_{\text{antecedent}}$

tale che per ogni anafora  $a \in F_{\text{anaphor}}(U)$ , esiste un antecedente  $\text{ant} \in F_{\text{antecedent}}(U_{\text{local}}(a))$  dove  $U_{\text{local}}(a)$  è il dominio locale minimo contenente  $a$ , e  $\Phi_A(a) = \text{ant}$  con  $\text{ant}$  che c-comanda  $a$ .

Inoltre, il morfismo deve essere compatibile con restrizioni: se restringiamo da  $U$  a  $V \subseteq U$ , l'anafora ristretta deve essere legata dall'antecedente ristretto:

$\rho^{\{\text{antecedent}\}}_{U,V}(\Phi_A(a)) = \Phi_A(\rho^{\{\text{anaphor}\}}_{U,V}(a))$

Questa compatibilità garantisce che relazioni di binding sono preservate sotto specializzazioni sintattiche: se un'anafora è legata globalmente in  $U$ , rimane legata quando restringiamo a qualsiasi  $V \subseteq U$  contenente l'anafora.

Condizione B Topologica: Esiste morfismo condizionale:

$\Phi_B : F_{\text{pronoun}} \rightarrow F_{\text{antecedent}} \cup \{\text{free}\}$

dove per ogni pronome  $p \in F_{\text{pronoun}}(U)$ , se  $\Phi_B(p) \in F_{\text{antecedent}}$ , allora l'antecedente NON è in  $U_{\text{local}}(p)$ . Ovvero, pronomi possono essere legati, ma solo da antecedenti esterni al loro dominio locale.

Formalmente, se  $\Phi_B(p) = \text{ant} \neq \text{free}$ , allora:

$$\text{ant} \in F_{\text{antecedent}}(U \setminus U_{\text{local}}(p))$$

Il pronome è libero localmente ma può essere legato esternamente.

Condizione C Topologica: Per espressioni R, non esiste morfismo di binding:

$$\neg \exists \Phi_C : F_{R\text{-expr}} \rightarrow F_{\text{antecedent}}$$

Ovvero, espressioni R non possono essere legate da antecedenti. Sono sempre interpretate liberamente, facendo riferimento direttamente a entità nel modello semantico senza mediazione anaforica.

Consideriamo applicazioni concrete. Nella frase:

"Giovanni<sub>i</sub> si<sub>i</sub> lava"

Abbiamo un'anafora riflessiva "si" che deve essere legata da un antecedente nel suo dominio locale (la clausola TP). La configurazione sintattica è:

[TP Giovanni<sub>i</sub> [VP si<sub>i</sub> lava]]

Il dominio locale di "si" è l'intero TP. "Giovanni" è nell'aperto  $U_{\text{TP}}$  e c-comanda "si". Il morfismo  $\Phi_A$  assegna:

$$\Phi_A(\text{si}) = \text{Giovanni}$$

soddisfacendo Condizione A. Se restringiamo l'analisi al VP, otteniamo:

$\rho_{\text{TP}, \text{VP}}(\Phi_A(\text{si}))$  dovrebbe essere ben definito

Ma "Giovanni" non è nel VP, quindi questa restrizione forza condizione: l'anafora deve avere il suo antecedente nel dominio locale minimo, che è il TP, non il VP. Questo cattura formalmente la località del binding anaforico.

Contrariamente, per pronomi:

"Giovanni<sub>i</sub> pensa che Maria lo<sub>i</sub> ammira"

Il pronome "lo" è nel TP embedded "Maria lo ammira". Il dominio locale di "lo" è questo TP embedded. "Giovanni" è nell'aperto  $U_{\text{TP-matrice}}$ , esterno a  $U_{\text{TP-embedded}}$ . Quindi:

$$\Phi_B(\text{lo}) = \text{Giovanni} \in F_{\text{antecedent}}(U_{\text{TP-matrice}} \setminus U_{\text{TP-embedded}})$$

Questo soddisfa Condizione B: il pronome è libero nel suo dominio locale (non legato da "Maria" che è nello stesso TP embedded), ma è legato da antecedente esterno "Giovanni".

Se tentassimo binding locale:

\*"Giovanni<sub>i</sub> lo<sub>i</sub> ammira"

Qui "Giovanni" e "lo" sono nello stesso dominio locale (TP matrice). Tentativo di binding:

$$\Phi_B(\text{lo}) = \text{Giovanni} \in F_{\text{antecedent}}(U_{\text{TP-matrice}})$$

Ma questo viola Condizione B perché l'antecedente è nel dominio locale. La configurazione è agrammaticale. Il fascio  $F_{\text{pronoun}}$  su questa configurazione non ammette morfismo di binding compatibile con Condizione B.

Topologicamente, possiamo interpretare questo come fallimento di incollamento: le interpretazioni locali (pronomi nel VP, antecedente nel TP) non sono compatibili sulle sovrapposizioni quando cerchiamo di formare interpretazione globale rispettando Condizione B.

Per espressioni R e Condizione C:

\*"Lui<sub>i</sub> pensa che Giovanni<sub>i</sub> sia intelligente"

Se "lui" fosse co-indicizzato con "Giovanni" (binding), violerebbe Condizione C perché "Giovanni" è espressione R che non può essere legata. Il fascio  $F_{R\text{-expr}}$  non ammette morfismi verso  $F_{\text{antecedent}}$ . Qualunque tentativo di costruire tale morfismo produce contraddizione topologica.

La profondità di questo approccio emerge quando consideriamo fenomeni più sottili come ricostruzione e binding in catene di movimento. Abbiamo già discusso ricostruzione per binding di anafore in costituenti mossi. Estendiamo ora l'analisi.

Consideriamo:

"Quale foto di se stesso<sub>i</sub> ha Giovanni<sub>i</sub> visto \_\_\_?"

La catena di movimento è:

(quale foto di se stesso<sub>CP</sub>, \_\_\_oggetto)

L'anafora "se stesso" è contenuta nel costituente mosso "quale foto di se stesso" che superficialmente è in Spec-CP. Da questa posizione, "Giovanni" (soggetto del TP matrice) non c-comanda "se stesso" direttamente. Tuttavia, se ricostruiamo semanticamente la catena, trattando l'interpretazione come se "quale foto di se stesso" fosse nella posizione traccia (oggetto), allora "Giovanni" c-comanda la traccia e quindi l'anafora contenuta.

Nel framework dei fasci, definiamo morfismo di ricostruzione:

$$\pi_{\text{recon}} : F_{\text{anaphor}}(\text{chain}_{\text{superficie}}) \rightarrow F_{\text{anaphor}}(\text{chain}_{\text{ricostruita}})$$

che mappa anafore dalla posizione superficiale alla posizione ricostruita. Il morphism  $\Phi_A$  opera poi sulla catena ricostruita:

$$\Phi_A(\pi_{\text{recon}}(\text{se stesso})) = \text{Giovanni}$$

dove "Giovanni" c-comanda la posizione ricostruita. La compatibilità topologica garantisce che questa ricostruzione è coerente: se la catena ammette ricostruzione (è del tipo giusto,

non contiene barriere), allora  $\pi_{\text{recon}}$  è morfismo ben definito che preserva relazioni di binding.

## 17.4 Ellissi e Recupero di Materiale Linguistico: Fasci di Strutture Vuote e Sheafification

L'ellissi è il fenomeno per cui materiale linguistico sintatticamente e semanticamente presente viene omesso foneticamente, essendo recuperabile dal contesto. Esempi paradigmatici includono:

Ellissi VP: "Giovanni ha letto il libro e Maria ha letto il libro anche"  $\rightarrow$  "Giovanni ha letto il libro e Maria anche"

Gapping: "Giovanni ha letto Dante e Maria ha letto Petrarca"  $\rightarrow$  "Giovanni ha letto Dante e Maria Petrarca"

Stripping: "Giovanni ha letto il libro, ma non Maria" (sottinteso: "ma non Maria ha letto il libro")

Sluicing: "Giovanni ha letto qualcosa, ma non so cosa" (sottinteso: "cosa Giovanni ha letto")

In tutti questi casi, materiale elidendo è sintatticamente e semanticamente attivo (partecipa alla derivazione, contribuisce all'interpretazione) ma foneticamente nullo.

La teoria generativa tradizionale modella ellissi attraverso deletion post-sintattico: la struttura completa è generata sintatticamente, poi parte viene cancellata dopo Spell-Out (trasferimento a PF) ma rimane presente a LF per interpretazione. Tuttavia, questa analisi via deletion incontra problemi empirici: in molti casi, il materiale elidendo non è sintattico completamente identico all'antecedente, ma solo semanticamente equivalente o contestualmente recuperabile.

La teoria dei fasci offre una prospettiva radicalmente diversa dove ellissi è modellata non come deletion ma come presenza di "siti vuoti" o "buchi" nello spazio sintattico che devono essere "riempiti" attraverso sheafification, un processo di completamento coerente basato su dati contestuali locali.

Formalizziamo con precisione. Definiamo uno spazio topologico  $X_{\text{struct}}$  rappresentante strutture sintattiche possibili, incluse strutture con siti vuoti o gap. Un punto  $s \in X_{\text{struct}}$  è una struttura sintattica parzialmente specificata:

$s = [\text{struttura con gap in posizione } \pi]$

dove  $\pi$  è una posizione strutturale che richiede materiale linguistico ma è foneticamente vuota.

Definiamo un prefascio  $F_{\text{ellip}}$  su  $X_{\text{struct}}$  che assegna a ogni aperto  $U$  contenuti linguistici possibili per riempire gap:



$F_{\text{ellip}}(U) = \{\text{assegnazioni } \varepsilon : U \rightarrow \text{Materiale-Linguistico} \text{ tali che per ogni } s \in U \text{ con gap in } \pi, \varepsilon(s) \text{ specifica materiale che riempie } \pi \text{ in modo sintatticamente e semanticamente appropriato}\}$

Crucialmente,  $F_{\text{ellip}}$  è tipicamente solo un prefascio, NON un fascio, perché il materiale che riempie un gap in un contesto locale potrebbe non essere compatibile con materiale che riempie lo stesso gap in un altro contesto locale, anche se i contesti si sovrappongono. Le condizioni di incollamento del fascio possono fallire.

Il processo di recupero ellittico è modellato come sheafification del prefascio  $F_{\text{ellip}}$ , producendo fascio associato  $F_{\text{ellip}}^+$ . Questa sheafification "forza" compatibilità locale laddove possibile, e identifica ostruzioni (elementi di  $H^1$ ) quando compatibilità non è raggiungibile.

Consideriamo ellissi VP nel dettaglio. La frase:

"Giovanni ha letto il libro e Maria anche"

Ha struttura superficiale:

[TP Giovanni [VP ha letto il libro]] e [TP Maria [VP \_\_\_\_]]

dove \_\_\_\_ è gap VP ellittico. Il prefascio  $F_{\text{ellip}}$  deve assegnare materiale al gap. Localmente, considerando solo la seconda congiunzione, molteplici riempimenti sono a priori possibili:

$\varepsilon_1() = \text{ha letto il libro (recupero dall'antecedente)}$   $\varepsilon_2() = \text{ha scritto il libro (se contesto suggerisce azione diversa)}$   $\varepsilon_3(\text{____}) = \text{ha letto un articolo (se "anche" si riferisce all'azione di lettura ma oggetto diverso)}$

Tuttavia, la particella "anche" impone vincolo pragmatico: suggerirebbe che Maria ha fatto qualcosa simile/identico a Giovanni. Questo vincolo topologico restringe le possibilità. Consideriamo ricoprimento  $\{U_{\text{conj1}}, U_{\text{conj2}}\}$  dove  $U_{\text{conj1}}$  contiene la prima congiunzione e  $U_{\text{conj2}}$  la seconda.

Sezioni locali:

$s_1 \in F_{\text{ellip}}(U_{\text{conj1}})$ : "ha letto il libro" (esplicito nella prima congiunzione)  $s_2 \in F_{\text{ellip}}(U_{\text{conj2}})$ : riempimento del gap nella seconda congiunzione

Per la condizione di compatibilità ellittica (identità o similarità), richiediamo:

$$s_1|_{U_{\text{conj1}} \cap U_{\text{conj2}}} = s_2|_{U_{\text{conj1}} \cap U_{\text{conj2}}}$$

Ovvero, sulle sovrapposizioni (dominio contestuale condiviso dalle due congiunzioni), i riempimenti devono essere identici o compatibili. Tipicamente, questo forza  $s_2 = s_1 = \text{"ha letto il libro"}$ .

La sheafification  $F_{\text{ellip}}^+$  produce un fascio dove esiste un'unica sezione globale  $s \in F_{\text{ellip}}^+(U_{\text{conj1}} \cup U_{\text{conj2}})$  tale che:

$s|_{U\_conj1}$  = "ha letto il libro" (esplicito)  $s|_{U\_conj2}$  = "ha letto il libro" (recuperato per incollamento)

Questa sezione globale è l'interpretazione ellittica risolta.

Se i vincoli contestuali sono insufficienti per determinare univocamente il riempimento, otteniamo ambiguità ellittica. Per esempio:

"Giovanni ha letto Dante e Maria anche"

Possibili riempimenti:

$\varepsilon_1()$  = **ha letto Dante (VP-ellissi completa)**  $\varepsilon_2()$  = ha letto (stripping, solo verbo recuperato, oggetto diverso implicato)

Senza contesto disambiguante, entrambi i riempimenti sono localmente compatibili. La sheafification produce fascio  $F_{\text{ellip}}^+$  che ammette molteplici sezioni globali, ciascuna corrispondente a una risoluzione ellittica diversa. L'ambiguità si manifesta come molteplicità di sezioni globali compatibili con dati locali.

Se i vincoli sono contraddittori (riempimenti locali incompatibili), la sheafification fallisce parzialmente. Per esempio, in costruzioni anomale:

\*"Giovanni ha letto Dante e Maria ha scritto anche"

Qui "anche" suggerirebbe identità di azione, ma "ha scritto" è esplicitamente diverso da "ha letto". Se cerchiamo di riempire il gap nel secondo congiunto con "ha letto Dante" (per compatibilità con "anche"), contraddice "ha scritto" esplicito. Se riempiamo con "ha scritto qualcosa" (compatibile con esplicito), contraddice "anche" che implica identità.

Le sezioni locali sono:

$s_1 \in F_{\text{ellip}}(U\_conj1)$  = "ha letto Dante"  $s_2 \in F_{\text{ellip}}(U\_conj2)$  = "ha scritto ???"

Sulle sovrapposizioni  $U\_conj1 \cap U\_conj2$ , i vincoli imposti da "anche" richiedono  $s_1 = s_2$ , ma esplicitamente  $s_2$  contiene "ha scritto"  $\neq$  "ha letto". Incompatibilità!

Questa incompatibilità genera cociclo non banale che contribuisce a  $H^1(U\_conj1 \cup U\_conj2, F_{\text{ellip}})$ . L'elemento non zero in  $H^1$  misura l'ostruzione coomologica al recupero ellittico coerente. La frase è percepita come anomala o agrammaticale proprio perché non esiste sheafification consistente.

Sluicing presenta complessità aggiuntive. Esempio:

"Giovanni ha parlato con qualcuno, ma non so con chi"

La struttura della seconda clausola è:

"ma non so [CP con  $chi_i$  [TP Giovanni ha parlato con  $t_i$ ]]"

dove l'intero TP è eliso tranne il wh-phrase "con chi". Il riempimento del gap richiede recuperare:

\_\_\_ = Giovanni ha parlato con  $t_i$

dall'antecedente nella prima clausola. Ma crucialmente, l'antecedente ha "qualcuno" mentre il sito ellittico ha traccia  $t_i$  legata da "chi". C'è corrispondenza non identica ma strutturalmente parallela.

Il prefascio  $F_{\text{sluicing}}$  deve codificare questa corrispondenza strutturale, non identità lessicale. Definiamo relazione di equivalenza strutturale  $\sim_{\text{struct}}$ :

$[TP \dots \text{qualcuno} \dots] \sim_{\text{struct}} [TP \dots t_i \dots]$

se hanno stessa struttura scheletrica con soli differenze nelle posizioni corrispondenti a wh-phrase e suo antecedente.

La sheafification  $F_{\text{sluicing}}^+$  incolla sezioni modulo  $\sim_{\text{struct}}$ , producendo interpretazione ellittica risolta:

"Giovanni ha parlato con qualcuno, ma non so [con quale persona  $x$  Giovanni ha parlato con  $x$ ]"

L'interpretazione esplicita della clausola elisa è costruita per incollamento topologico rispettando parallelismo strutturale.

In sintesi, ellissi nella teoria dei fasci è fenomeno di completamento locale che rispetta vincoli di compatibilità topologica. Non è deletion arbitrario ma recupero coerente governato da principi di incollamento fasciale. Le ostruzioni coomologiche ( $H^1$  non banale) segnalano quando recupero coerente è impossibile, predizione empiricamente testabile attraverso giudizi di accettabilità.

## Capitolo 18: Fenomeni Cross-Linguistici e Teoria dei Fasci

### 18.1 Parametri di Variazione tra Lingue: Fasci su Spazi Parametrici

La diversità linguistica rappresenta uno dei fenomeni più affascinanti e al contempo problematici per la teoria linguistica. Le lingue umane mostrano simultaneamente profonde somiglianze strutturali (suggerendo principi universali innati) e variazioni sistematiche significative (suggerendo apprendimento culturale e storico). La teoria dei Principi e Parametri, sviluppata nella tradizione generativista, propone che la Grammatica Universale consista di principi invarianti comuni a tutte le lingue, più un insieme finito di parametri che possono assumere valori diversi, producendo la diversità osservata.

Esempi classici di parametri includono il Parametro pro-drop (se la lingua permette soggetti pronominali nulli), il Parametro dell'ordine testa-complemento (se le teste precedono o seguono i loro complementi), il Parametro del movimento wh- (se i sintagmi interrogativi si muovono sintatticamente o rimangono in situ), il Parametro della negazione (posizione e forma dei marcatori negativi).

La teoria dei fasci offre una formalizzazione matematicamente precisa e concettualmente illuminante di questa architettura parametrica. L'idea centrale è costruire uno spazio topologico dei parametri  $P$  dove ciascun punto  $p \in P$  rappresenta una particolare fissazione di tutti i parametri, ovvero una "grammatica particolare" risultante da scelte parametriche specifiche. Le lingue naturali osservate corrispondono a punti in questo spazio parametrico, e la topologia su  $P$  cattura relazioni di similarità e distanza tipologica tra lingue.

Formalizziamo con precisione. Supponiamo che la Grammatica Universale specifichi  $n$  parametri binari  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$ , ciascuno con due valori possibili  $\{+, -\}$ . Lo spazio parametrico è il prodotto cartesiano:

$$P = \{+, -\}^n = \{+, -\} \times \{+, -\} \times \dots \times \{+, -\}$$

Ciascun punto  $p = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in P$  con  $v_i \in \{+, -\}$  rappresenta una grammatica particolare. Per esempio, se consideriamo solo tre parametri:

$\Pi_1$  = pro-drop  $\Pi_2$  = ordine testa-complemento (+ = head-initial, - = head-final)  $\Pi_3$  = movimento wh-

Allora  $p = (+, +, -)$  rappresenta una lingua pro-drop, head-initial, senza movimento wh- (tipo cinese mandarino approssimativamente), mentre  $p' = (-, +, +)$  rappresenta una lingua non-pro-drop, head-initial, con movimento wh- (tipo inglese).

La topologia discreta su  $P$  sarebbe la più semplice ma anche la meno informativa: ogni punto è isolato, tutte le grammatiche sono equidistanti. Invece, definiamo topologie più raffinate che riflettono distanze tipologiche reali.

Una possibilità è la topologia di Hamming, dove la distanza tra due punti è il numero di parametri su cui differiscono:

$$d_H(p, p') = |\{i : v_i \neq v'_i\}|$$

Due grammatiche con  $d_H = 1$  differiscono su un solo parametro e sono tipologicamente molto vicine. La topologia indotta ha come aperti base le sfere di Hamming:

$$B(p, r) = \{p' \in P : d_H(p, p') < r\}$$

Questa topologia cattura l'intuizione che grammatiche vicine tipologicamente (pochi parametri diversi) dovrebbero essere topologicamente vicine.

Più sofisticato è pesare i parametri diversamente. Alcuni parametri hanno effetti più profondi e pervasivi sulla grammatica di altri. Per esempio, il parametro dell'ordine basico può influenzare moltissime costruzioni, mentre il parametro del raddoppiamento clitico può avere effetti più limitati. Definiamo pesi  $w_1, w_2, \dots, w_n$  e distanza pesata:

$$d_w(p, p') = \sum_i w_i \cdot \delta(v_i, v'_i)$$

dove  $\delta(v_i, v'_i) = 1$  se  $v_i \neq v'_i$ , altrimenti 0. Parametri con peso alto contribuiscono maggiormente alla distanza tipologica.

Definiamo ora fasci grammaticali su  $P$ . Per ogni aperto  $U \subseteq P$  (famiglia di grammatiche), il fascio  $F_{\text{gram}}$  assegna le costruzioni sintattiche ammissibili:

$$F_{\text{gram}}(U) = \{\text{costruzioni sintattiche } C \text{ che sono grammaticali in tutte le grammatiche } p \in U\}$$

Le mappe di restrizione  $p_{U,V}$  per  $V \subseteq U$  specializzano costruzioni: restringendo a sottofamiglia di grammatiche, solo costruzioni valide in tutte quelle grammatiche sopravvivono.

Per esempio, consideriamo  $U_{\text{pro-drop}} = \{p \in P : p \text{ ha pro-drop} = +\}$ , l'aperto di tutte le grammatiche pro-drop. Allora:

$F_{\text{gram}}(U_{\text{pro-drop}})$  include costruzioni come "Parla italiano" (soggetto nullo)

Ma:

$F_{\text{gram}}(P \setminus U_{\text{pro-drop}})$  non include questa costruzione (agrammaticale in lingue non-pro-drop)

Le sezioni globali  $F_{\text{gram}}(P)$  sono costruzioni universali, grammaticali in tutte le lingue indipendentemente da parametri. Queste sono rare e tipicamente molto basiche ("intransitivi nucleari" tipo equivalenti di "dormire", "esistere").

La coomologia del fascio  $F_{\text{gram}}$  misura l'impossibilità di estendere costruzioni locali (valide in alcune grammatiche) a costruzioni globali (valide universalmente). Un elemento non banale di  $H^1(P, F_{\text{gram}})$  rappresenta una famiglia di costruzioni definite su grammatiche locali che sono mutuamente compatibili sulle sovrapposizioni ma non possono essere unificate in una costruzione universale.

Per esempio, consideriamo marcatura del Caso. Lingue con morfologia di Caso ricca (come latino, russo, tedesco) marcano esplicitamente funzioni grammaticali morfologicamente. Lingue con morfologia povera (come inglese, cinese) usano ordine delle parole e preposizioni/postposizioni.

Sia  $U_{\text{rich-case}} = \{p : p \text{ ha parametro morfologia-Case} = +\}$  e  $U_{\text{poor-case}}$  il suo complemento. Abbiamo:

$F_{\text{gram}}(U_{\text{rich-case}})$ : costruzioni con ordine delle parole relativamente libero, marcato Caso morfologico  
 $F_{\text{gram}}(U_{\text{poor-case}})$ : costruzioni con ordine fisso, marcatura Caso posizionale/preposizionale

Questi due sistemi sono localmente coerenti ma incompatibili globalmente. Non esiste "costruzione universale" che funzioni sia in lingue con Caso morfologico che senza. Questo genera ostruzione in  $H^1$ .

## 18.2 Universal Linguistics as Topological Invariants

Linguistic universals are properties or patterns that all human languages share, independently of parametric variations. Some are absolute (verissimi senza eccezioni), others statistical (tendenze forti con poche eccezioni), others implicational (if a language has property A, then it has property B).

In the theory of bundles, we can formalize universals as topological invariants of the parametric space  $P$ , properties that remain stable under topological transformations or under categorical operations on bundles.

An absolute universal corresponds to a property  $P$  such that for every point  $p \in P$  (every possible grammar),  $P(p)$  is true. Topologically, this means that  $P$  is a constant function on the whole  $P$ , or equivalently that  $P$  defines a constant section of the bundle.

$$P \in F_{\text{const}}(P) = \{\text{constant functions on } P\}$$

Examples might include:

- All languages have nouns and verbs (lexical categories universal)
- All languages have a way to form negation
- All languages have a way to form questions

These are modeled as global sections of bundles appropriate that assign to every grammar categorical structures, negative constructions, interrogative constructions.

An implicational universal has the form "if A then B". For example, the universal of Greenberg #3: "Languages with VSO order have prepositions" can be formalized topologically.

Let  $U_{\text{VSO}} = \{p \in P : p \text{ has basic VSO order}\} \subseteq P$ . The universal requires:

For every  $p \in U_{\text{VSO}}$ ,  $p$  has prepositions (not postpositions)

This is expressed as restriction of the bundle  $F_{\text{adposition}}$ :

$$F_{\text{adposition}}(U_{\text{VSO}}) \subseteq F_{\text{preposition}}$$

Or, by restricting the bundle of adpositions to the subspace VSO, we obtain only prepositions.

The universal validity of this implication means that the restriction  $\rho_{P, U_{\text{VSO}}}$  when applied to the global bundle produces only sections that correspond to prepositions:

$$\rho_{P, U_{\text{VSO}}}(F_{\text{adposition}}(P)) \subseteq F_{\text{preposition}}(U_{\text{VSO}})$$

More sophisticated topological invariants emerge from cohomology. Consider the fundamental group  $\pi_1(P)$  of the parametric space (if  $P$  is sufficiently regular topologically to admit such definition). This group captures "cycles" in the space of grammars that cannot be contracted continuously.

Un loop  $\gamma : [0,1] \rightarrow P$  con  $\gamma(0) = \gamma(1) = p_0$  rappresenta una sequenza di trasformazioni parametriche che partono da una grammatica  $p_0$ , passano attraverso varie altre grammatiche, e ritornano a  $p_0$ . Se  $\gamma$  è non banale in  $\pi_1(P)$ , significa che questo ciclo non può essere contratto, rappresenta una "ostruzione topologica" nello spazio delle grammatiche.

Speculativamente, loops non banali potrebbero corrispondere a fenomeni diacronici di cambiamento linguistico ciclico: lingue che attraverso successivi cambiamenti storici ritornano a stati grammaticali precedenti ma attraverso percorsi intermedi che non possono essere "accorciati".

Gli invarianti coomologici  $H^n(P, F_{\text{gram}})$  per  $n > 0$  misurano ostruzioni di ordine superiore.  $H^1$  misura impossibilità di incollare costruzioni locali in costruzioni globali universali.  $H^2$  potrebbe misurare "meta-ostruzioni", impossibilità di incollare famiglie di ostruzioni.

Se  $H^1(P, F_{\text{gram}}) = 0$  (gruppo banale), significherebbe che ogni famiglia localmente consistente di costruzioni grammaticali può essere estesa a costruzione universale, implicando che la diversità linguistica è completamente "incollabile", che non ci sono ostruzioni fondamentali. Empiricamente, questo è falso: ci sono ostruzioni reali. Quindi  $H^1(P, F_{\text{gram}}) \neq 0$ .

La struttura precisa di  $H^1(P, F_{\text{gram}})$  codifica informazione profonda sui limiti della variazione linguistica, sui "muri" che separano spazi grammaticali incompatibili.

## 18.3 Traduzioni come Morfismi tra Fasci su Spazi Contestuali Diversi

La traduzione tra lingue è notoriamente complessa e sfuggente. Raramente esiste corrispondenza uno-a-uno tra espressioni di lingue diverse; più tipicamente, espressioni equivalenti semanticamente hanno connotazioni diverse, presuppongono contesti diversi, attivano frame culturali diversi. La "intraducibilità" parziale è fenomeno ben documentato: certe parole o espressioni in una lingua non hanno equivalenti naturali in altre lingue.

Nella teoria dei fasci, la traduzione può essere modellata come morfismo tra fasci semantici definiti su spazi contestuali potenzialmente diversi. Lingue diverse non solo hanno lessici e sintassi diversi, ma anche "tagliano" lo spazio contestuale in modi diversi, rendendo salienti dimensioni contestuali diverse, organizzando contesti secondo topologie diverse.

Formalizziamo. Sia  $X_{L_1}$  lo spazio contestuale per lingua  $L_1$  e  $X_{L_2}$  lo spazio contestuale per lingua  $L_2$ . Anche se le lingue si riferiscono allo "stesso mondo", organizzano contesti comunicativi diversamente. Per esempio:

- $L_1$  potrebbe lessicalizzare distinzioni di evidenzialità (fonte dell'informazione) sistematicamente, rendendo questa dimensione contestuale centrale.  $X_{L_1}$  ha componente ricca  $X_{\text{evid}}$ .
- $L_2$  potrebbe non lessicalizzare evidenzialità ma distinguere sistematicamente livelli di formalità.  $X_{L_2}$  ha componente ricca  $X_{\text{formal}}$  ma  $X_{\text{evid}}$  minimale.

I fasci semantici  $F_{L_1}$  su  $X_{L_1}$  e  $F_{L_2}$  su  $X_{L_2}$  assegnano interpretazioni a espressioni nelle rispettive lingue.

Una traduzione  $T : L_1 \rightarrow L_2$  che mappa espressioni di  $L_1$  a espressioni di  $L_2$  è accompagnata da funzione continua tra spazi contestuali:

$$f_T : X_{L_2} \rightarrow X_{L_1}$$

(notare direzione: da contesti  $L_2$  a contesti  $L_1$ , controvariante rispetto alla direzione della traduzione linguistica). Questa funzione specifica, per ogni contesto  $c_2$  dove useremo l'espressione tradotta in  $L_2$ , qual è il "contesto corrispondente"  $c_1 = f_T(c_2)$  in  $L_1$  che rende la traduzione appropriata.

Il morfismo di traduzione è poi:

$$\Phi_T : f_T^*(F_{L_1}) \rightarrow F_{L_2}$$

dove  $f_T^*(F_{L_1})$  è il pullback (immagine inversa) del fascio  $F_{L_1}$  lungo  $f_T$ . Questo pullback "trasporta" interpretazioni da  $X_{L_1}$  a  $X_{L_2}$ .

La compatibilità con restrizioni garantisce che tradurre e poi specializzare contestualmente produce lo stesso risultato che specializzare e poi tradurre.

Consideriamo esempio concreto: traduzione dall'inglese all'italiano del verbo "to know".

Inglese: "to know" (unico verbo) Italiano: "sapere" vs "conoscere" (distinzione lessicalizzata)

"Sapere" = conoscenza proposizionale, fatti ("So che Parigi è in Francia") "Conoscere" = conoscenza acquaintance, persone/luoghi ("Conosco Parigi")

Lo spazio contestuale inglese  $X_{eng}$  non distingue topologicamente questi due tipi di contesti di conoscenza nella sua struttura lessicale (anche se semanticamente la distinzione esiste). Lo spazio contestuale italiano  $X_{ita}$  ha questa distinzione codificata lessicalmente, quindi:

$$X_{ita} = X_{ita\_sap} \cup X_{ita\_con}$$

dove  $X_{ita\_sap}$  sono contesti di conoscenza proposizionale,  $X_{ita\_con}$  contesti di conoscenza acquaintance.

La funzione  $f_T$  deve mappare:

$f_T(X_{ita\_sap}) \rightarrow$  sottoregione di  $X_{eng}$  con contesti proposizionali  $f_T(X_{ita\_con}) \rightarrow$  sottoregione di  $X_{eng}$  con contesti acquaintance

Il morfismo  $\Phi_T$  mappa:

$$\Phi_T(f_T^*(F_{know})) \rightarrow F_{sapere} \text{ su } X_{ita\_sap} \quad \Phi_T(f_T^*(F_{know})) \rightarrow F_{conoscere} \text{ su } X_{ita\_con}$$



Traducendo "I know Paris"  $\rightarrow$  "Conosco Parigi", il contesto  $c_{ita}$  determina che siamo in  $X_{ita\_con}$ , quindi  $f_T$  seleziona "conoscere".

Traducendo "I know that Paris is in France"  $\rightarrow$  "So che Parigi è in Francia", il contesto determina  $X_{ita\_sap}$ , quindi "sapere".

La "perdita in traduzione" corrisponde a situazioni dove  $f_T$  non è iniettiva o surgettiva:

Non iniettiva: contesti distinti in  $L_2$  collassano allo stesso contesto in  $L_1$ . Informazione contestuale codificata in  $L_2$  non è rappresentabile in  $L_1$ .

Non surgettiva: esistono contesti in  $L_1$  senza preimmagine in  $L_2$ . Espressioni  $L_1$  non hanno equivalenti contestuali appropriati in  $L_2$  (intraducibilità).

Esempio di intraducibilità: la parola tedesca "Schadenfreude" (piacere per la disgrazia altrui). Inglese non ha lessicalizzazione singola. Tradurre richiede perifrasi "pleasure at someone else's misfortune".

Lo spazio contestuale tedesco  $X_{deu}$  ha una regione  $U_{schad}$  dove questo concetto emotivo specifico è saliente e lessicalizzato.  $X_{eng}$  non ha regione corrispondente lessicalmente codificata. La funzione  $f_T$  mappa  $U_{schad}$  a una regione compositiva in  $X_{eng}$  dove il concetto deve essere espresso perifraticamente.

Il morfismo  $\Phi_T : f_T^*(F_{Schadenfreude}) \rightarrow F_{perifrasi}$

mappa dalla sezione tedesca singola a una sezione inglese complessa compositiva. La traduzione è possibile ma "non diretta", richiede espansione lessicale.

$H^1(X_{eng} \cup X_{deu}, F_{traduzione}) \neq 0$  indica che esistono ostruzioni coomologiche alla traduzione perfetta tra inglese e tedesco: famiglie di espressioni che sono localmente traducibili (in contesti ristretti) ma non ammettono traduzione globale coerente attraverso tutti i contesti.

La teoria predice che coppie di lingue tipologicamente distanti (grande  $d_w$  nello spazio parametrico, topologie contestuali molto diverse) avranno  $H^1$  più ricco (più ostruzioni), rendendo traduzione sistematicamente più difficile. Empiricamente verificabile attraverso metriche di difficoltà traduttiva.

## **Capitolo 19: Acquisizione del Linguaggio e Costruzione Progressiva di Fasci Semantici**

### **19.1 Il Problema dell'Acquisizione nella Teoria Linguistica: Dalla Povertà dello Stimolo alla Ricchezza Topologica**

L'acquisizione del linguaggio da parte dei bambini rappresenta uno dei fenomeni cognitivi più straordinari e teoricamente significativi. In un periodo relativamente breve, tipicamente tra i 18 mesi e i 5 anni, i bambini passano da una competenza linguistica quasi nulla a una padronanza sofisticata e creativa della loro lingua nativa, producendo e comprendendo enunciati mai sentiti prima, applicando regole grammaticali complesse in modo sistematico, distinguendo costruzioni grammaticali da agrammaticali con giudizi sorprendentemente consistenti.

Il problema teorico centrale, famosamente articolato da Noam Chomsky come "argomento della povertà dello stimolo", è che l'input linguistico a cui i bambini sono esposti appare drasticamente insufficiente per spiegare la ricchezza e la complessità della competenza linguistica che sviluppano. L'input contiene errori, frasi incomplete, espressioni ambigue, usi idiosincratici, eppure i bambini convergono su grammatiche sistematiche e largamente condivise con altri parlanti nativi. Come è possibile questo apprendimento così rapido, efficace e robusto da dati così limitati e rumorosi?

La risposta generativista tradizionale è che i bambini non partono da zero ma possiedono una Grammatica Universale innata, un insieme di principi e parametri geneticamente determinati che delimitano drammaticamente lo spazio delle grammatiche possibili. L'acquisizione diventa questione di fissare valori parametrici basandosi sull'input, processo relativamente semplice se i parametri sono pochi e binari, e se principi universali forniscono la struttura scheletrica.

Tuttavia, questa spiegazione presenta proprie difficoltà. Primo, l'evidenza empirica per parametri binari specifici è spesso debole; molte variazioni linguistiche sembrano più graduate o multifattoriali. Secondo, anche con Grammatica Universale, rimane misterioso come esattamente i bambini mappano input linguistico grezzo (segnali acustici continui, enunciati in contesti complessi) a rappresentazioni sintattiche astratte e interpretazioni semantiche appropriate. Terzo, il meccanismo di fissazione parametrica rimane largamente non specificato: cosa conta come "evidenza" per un valore parametrico? Come i bambini evitano ipotesi errate quando l'evidenza è ambigua?

La teoria dei fasci offre un framework radicalmente diverso e potenzialmente molto più esplicativo per modellare l'acquisizione linguistica. L'idea centrale è che l'acquisizione non è fissazione istantanea di parametri discreti né accumulazione graduale di associazioni statistiche, ma è piuttosto un processo di costruzione progressiva di fasci semantici attraverso sheafification iterativa, dove il bambino inizia con prefasci frammentari, localmente definiti su piccole regioni contestuali basate su esperienze linguistiche limitate, e gradualmente estende, raffina, incolla questi prefasci locali in fasci sempre più globalmente coerenti, risolvendo ostruzioni coomologiche quando emergono attraverso revisione e riorganizzazione delle strutture semantiche.

Questa prospettiva riconcilia naturaliter aspetti della teoria innatista (esistono vincoli strutturali, topologie spaziali prespecificate) con aspetti della teoria empirista (l'apprendimento è guidato dall'input, costruisce rappresentazioni progressivamente). I vincoli innati non sono parametri discreti da fissare ma strutture topologiche, relazioni di compatibilità, condizioni di fascio che devono essere rispettate. L'input linguistico fornisce

sezioni locali, frammenti interpretativi parziali. Il processo di acquisizione è sheafification, incollamento di questi frammenti in fasci coerenti globalmente.

Formalizziamo con precisione matematica. Definiamo uno spazio di stadi acquisizionali  $A = A_0, A_1, A_2, \dots, A_\infty$  dove  $A_t$  rappresenta lo stato della competenza linguistica del bambino al tempo  $t$ .  $A_0$  è lo stato iniziale (neonato),  $A_\infty$  è la competenza adulta stabilizzata. Ciascuno stadio  $A_t$  è caratterizzato da un prefascio o fascio  $F_t$  su uno spazio contestuale  $X_t$  che può esso stesso evolvere nel tempo.

Stadio iniziale  $A_0$ : Il neonato ha capacità percettive ma nessuna competenza linguistica specifica. Il prefascio  $F_0$  è quasi vuoto o estremamente frammentario:

$F_0(U) = \{\text{interpretazioni proto-linguistiche basate su percezione diretta, associazioni senso-motorie primitive}\}$

Lo spazio contestuale  $X_0$  è minimale, forse riducibile a distinzioni percettive basiche (presenza/assenza di oggetti, azioni osservate direttamente).

Stadio precoce  $A_1$  (circa 6-12 mesi): Il bambino inizia a segmentare il flusso acustico continuo in unità discrete (parole), riconoscere pattern fonetici ricorrenti, associare suoni a referenti nel mondo. Il prefascio  $F_1$  assegna interpretazioni a "proto-parole":

$F_1(U) = \{\text{assegnazioni fonologia} \rightarrow \text{referenti percettivi per contesti in } U\}$

Crucialmente,  $F_1$  è solo prefascio, non fascio. Le interpretazioni sono localmente definite (per singole parole in contesti specifici isolati) ma non necessariamente compatibili globalmente. Il bambino potrebbe associare "mama" a sua madre in contesto domestico, ma non generalizzare sistematicamente a altre istanze o contesti. Le sezioni locali non si incollano.

Stadio holophrasi  $A_2$  (circa 12-18 mesi): Fase dove singole parole fungono da enunciati completi. "Pappa!" può significare "voglio pappa", "questa è pappa", "dove è la pappa?" a seconda del contesto. Il prefascio  $F_2$  ha sezioni più ricche ma ancora altamente contestualmente dipendenti e sottodeterminate:

$F_2(U) = \{\text{interpretazioni holophrastic: parola singola} \rightarrow \text{proposizione contestualizzata}\}$

Le mappe di restrizione esistono ma sono deboli: restringere contestualmente può cambiare drammaticamente l'interpretazione della stessa parola.

Stadio telegrafico  $A_3$  (circa 18-24 mesi): Il bambino inizia a combinare due o più parole in "utterances telegrafiche": "mamma pappa", "no andare", "più latte". Morfologia flessiva è ancora largamente assente. Il prefascio  $F_3$  assegna interpretazioni compositivamente:

$F_3(U) = \{\text{interpretazioni di sequenze multi-parola basate su combinazione di significati lessicali}\}$

Ma la composizionalità è rudimentale. Non ci sono ancora regole sintattiche sistematiche. Le combinazioni sono largamente pragmatiche, guidate da pressioni comunicative immediate.

## 19.2 Sheafification Progressiva: Come i Bambini Costruiscono Fasci da Prefasci Frammentari

Il passaggio chiave nell'acquisizione è la transizione da prefasci frammentari e localmente inconsistenti a fasci coerenti che soddisfano le condizioni di località e incollamento. Questo processo è sheafification progressiva: il bambino incontra evidenza linguistica (input) che fornisce nuove sezioni locali, tenta di incollare queste sezioni con sezioni precedentemente acquisite, e quando l'incollamento fallisce (ostruzioni coomologiche), riorganizza le strutture per eliminare incoerenze.

Formalmente, dato prefascio  $F_t$  allo stadio  $t$ , l'input linguistico fornisce famiglia di sezioni locali  $\{s_i \in F_t(U_i)\}$  definite su ricoprimento  $\{U_i\}$  dello spazio contestuale. Il bambino applica operazione di sheafification:

$$F_{t+1} = \text{Sheaf}(F_t \cup \{s_i\})$$

producendo fascio (o prefascio migliorato)  $F_{t+1}$  che include le sezioni precedenti più le nuove sezioni, incollate coerentemente dove possibile.

Se le nuove sezioni sono compatibili con le esistenti ( $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  per sezioni già presenti), l'incollamento ha successo immediatamente. Il fascio  $F_{t+1}$  estende  $F_t$  monotonicamente.

Se ci sono incompatibilità, emergono ostruzioni coomologiche. Il bambino ha tre strategie:

Strategia 1 - Accomodazione locale: Modificare solo sezioni localmente per eliminare conflitti, lasciando struttura globale invariata. Questo corrisponde a aggiustamenti locali del prefascio in regioni contestuali ristrette.

Strategia 2 - Riorganizzazione strutturale: Cambiare la topologia dello spazio contestuale  $X_t$ , ridefinendo quali regioni sono aperti, come contesti sono raggruppati. Questo può dissolvere ostruzioni rendendo compatibili sezioni precedentemente incompatibili.

Strategia 3 - Accettazione di ambiguità: Ammettere che  $F_{t+1}$  rimane prefascio con molteplici sezioni globali non incollabili, corrispondenti ad ambiguità residua o variazione libera.

Consideriamo esempio dettagliato di acquisizione della sovra-regolarizzazione (over-regularization) nella morfologia verbale.

Stadio iniziale  $A_k$ : Il bambino ha acquisito alcune forme verbali irregolari memorizzate holisticamente come chunks non analizzati:

"andare" → "andato" (passato prossimo irregolare) "fare" → "fatto" "essere" → "stato"

Queste sono sezioni locali  $F_k(U_{\text{irreg}})$  dove  $U_{\text{irreg}}$  è la piccola regione contestuale di verbi irregolari familiari.

Stadio intermedio  $A_{\{k+1\}}$ : Il bambino acquisisce la regola generale di formazione del passato prossimo regolare:

"parlare"  $\rightarrow$  "parlato" (regolare -are  $\rightarrow$  -ato) "credere"  $\rightarrow$  "creduto" (regolare -ere  $\rightarrow$  -uto)

Questa è una sezione generale  $F_{\{k+1\}}(U_{\text{reg}})$  definita su ampia regione  $U_{\text{reg}}$  di verbi regolari, rappresentando una regola produttiva.

Fase di sovra-regolarizzazione  $A_{\{k+2\}}$ : Il bambino estende la regola regolare anche a verbi irregolari, producendo forme sovra-regolarizzate:

"andare"  $\rightarrow$  "andato" ma anche "\*"andato" prodotto per regola (coincide accidentalmente)  
 "fare"  $\rightarrow$  "\*"facuto" (sovra-regolarizzato erroneamente) "essere"  $\rightarrow$  "\*"essuto" (sovra-regolarizzato)

Cosa sta succedendo topologicamente? Il bambino tenta di incollare la sezione regolare  $F_{\{k+1\}}(U_{\text{reg}})$  con le sezioni irregolari  $F_k(U_{\text{irreg}})$ . Ingenua estensione della regola produttiva suggerirebbe:

$F_{\{k+2\}}(U_{\text{reg}} \cup U_{\text{irreg}})$  = sezione unificata applicando regola ovunque

Ma questo crea incompatibilità sulla sovrapposizione  $U_{\text{reg}} \cap U_{\text{irreg}}$  (se verbi irregolari sono anche trattati come regolarizzabili):

Sezione irregolare memorizzata:  $s_{\text{irreg}}(\text{"fare"}) = \text{"fatto"}$  Sezione regolarizzata:  $s_{\text{reg}}(\text{"fare"}) = *facuto"$

$s_{\text{irreg}} \neq s_{\text{reg}}$  sulla sovrapposizione, violando condizione di compatibilità.

Il cociclo risultante  $\delta(s_{\text{irreg}}, s_{\text{reg}}) \neq 0$  genera elemento in  $H^1$ , segnalando ostruzione.

Stadio maturo  $A_{\{k+3\}}$ : Il bambino risolve l'ostruzione riorganizzando lo spazio contestuale. Invece di trattare tutti i verbi uniformemente, introduce distinzione topologica esplicita:

$X_{\text{verbi}} = U_{\text{reg}} \sqcup U_{\text{irreg}}$  (unione disgiunta, non sovrapposizione)

Verbi regolari e irregolari sono ora in componenti disgiunte. Sezioni sono:

$F_{\{k+3\}}(U_{\text{reg}})$  = regola produttiva applicata solo a verbi regolari  $F_{\{k+3\}}(U_{\text{irreg}})$  = forme memorizzate holisticamente per verbi irregolari

Non c'è sovrapposizione, quindi non ci sono ostruzioni. Le forme irregolari memorizzate "bloccano" applicazione della regola generale per quei verbi specifici.

Questo processo di sheafification  $\rightarrow$  ostruzione  $\rightarrow$  riorganizzazione  $\rightarrow$  risoluzione modella la curva acquisizionale ben documentata empiricamente: performance iniziale corretta (forme memorizzate)  $\rightarrow$  fase di errori sovra-regolarizzati  $\rightarrow$  correzione matura.

## 19.3 Errori Infantili come Violazioni Temporanee delle Condizioni di Fascio

Gli errori che i bambini commettono durante l'acquisizione non sono rumore casuale ma riflettono sistematicamente violazioni temporanee delle condizioni di fascio, fallimenti di località o incollamento che il bambino non ha ancora risolto.

Tipo 1 - Violazioni di Località: Il bambino estende interpretazioni oltre i loro domini locali appropriati, fallendo la condizione che sezioni globali sono determinate da restrizioni locali.

Esempio: Sovra-estensione semantica. Il bambino usa "cane" per riferirsi a tutti gli animali a quattro zampe (cani, gatti, cavalli, mucche). Il prefascio  $F_{\text{cane}}(U)$  inizialmente assegna:

$F_{\text{cane}}(U_{\text{tutti-quadrupedi}})$  = denotazione estesa a tutti i quadrupedi

Ma l'input adulto fornisce sezioni locali correttive:

$s_{\text{adulto, gatto}} \in F_{\text{animali}}(U_{\text{gatti}})$ : usa "gatto" non "cane"  $s_{\text{adulto, cavallo}} \in F_{\text{animali}}(U_{\text{cavalli}})$ : usa "cavallo" non "cane"

Queste sezioni sono incompatibili con l'estensione infantile. La sovrapposizione:

$U_{\text{cani}} \cap U_{\text{tutti-quadrupedi}}$

produce conflitto. La sezione infantile  $s_{\text{bambino}}(\text{"quadrupede"}) = \text{"cane"}$  non coincide con la sezione adulta  $s_{\text{adulto}}(\text{"quadrupede"}) = \text{lessicalmente specificato per sottocategoria}$ .

Il bambino risolve restringendo  $F_{\text{cane}}(U)$  solo a  $U_{\text{cani}} \subset U_{\text{tutti-quadrupedi}}$ , introducendo lessicalizzazioni separate per altre categorie. Violazione di località risolta.

Tipo 2 - Violazioni di Incollamento: Il bambino ha sezioni locali incompatibili che non possono essere incollate, ma non riconosce ancora l'incompatibilità, producendo enunciati incoerenti.

Esempio: Errori di accordo. Il bambino produce:

\*"Le bambine è andata al parco"

Analisi: Il soggetto "le bambine" ha caratteristiche [+plurale, +femminile]. Il verbo "è andata" ha caratteristiche [+singolare, +femminile]. C'è accordo in genere ma non in numero.

Il prefascio  $F_{\text{accordo}}$  ha sezioni locali:

$s_{\text{soggetto}}(U_{\text{NP}}) = [+plurale, +femminile]$   $s_{\text{verbo}}(U_{\text{VP}}) = [+singolare, +femminile]$

Sulla sovrapposizione  $U_{\text{NP}} \cap U_{\text{VP}}$  (la frase completa), richiediamo:

$s_{\text{soggetto}}|_{\{U_{\text{NP}} \cap U_{\text{VP}}\}} = s_{\text{verbo}}|_{\{U_{\text{NP}} \cap U_{\text{VP}}\}}$

Ma  $[+plurale] \neq [+singolare]$ , violazione della condizione di compatibilità per incollamento.

Il bambino maturo impara il vincolo universale di accordo:

$$\Phi_{\text{accord}} : F_{\text{soggetto}} \rightarrow F_{\text{verbo}}$$

che forza sincronizzazione delle caratteristiche di numero. Violazione risolta attraverso acquisizione del morfismo di accordo.

Tipo 3 - Prefasci Non Sheafificati: Il bambino ha collezioni di conoscenze linguistiche locali che non ha ancora integrato in un fascio coerente, risultando in performance inconsistente a seconda del contesto.

Esempio: Competenza frammentata con costruzioni passive. Il bambino comprende e produce passivi in certi contesti (narrazioni di storie familiari) ma non in altri (descrizioni di eventi nuovi). Il prefascio  $F_{\text{passivo}}$  ha sezioni:

$F_{\text{passivo}}(U_{\text{storie-familiari}}) \neq \emptyset$  (sezioni esistono)  $F_{\text{passivo}}(U_{\text{eventi-nuovi}}) = \emptyset$  (nessuna sezione, struttura non acquisita)

Non c'è sezione globale  $s \in F_{\text{passivo}}(U_{\text{storie}} \cup U_{\text{eventi}})$  perché manca sul secondo aperto. Il bambino non può "incollare" la competenza limitata a competenza generale.

Acquisizione matura corrisponde a estendere  $F_{\text{passivo}}$  attraverso sheafification, generalizzando da contesti familiari a tutti i contesti appropriati, riempiendo i "buchi" nel prefascio.

## 19.4 Acquisizione della Sintassi: Costruzione di Fasci di Strutture e Derivazioni

L'acquisizione sintattica presenta sfide particolari perché le strutture sintattiche sono astratte, gerarchiche, non direttamente osservabili nell'input lineare. Come i bambini inferiscono strutture gerarchiche da sequenze lineari di parole?

Nella teoria dei fasci, le derivazioni sintattiche sono morfismi tra fasci (Capitolo 17). L'acquisizione sintattica è quindi acquisizione progressiva di questi morfismi, costruzione di mappature coerenti da forme superficiali a strutture profonde e interpretazioni.

Stadio precoce: Il bambino tratta enunciati come sequenze lineari piatte senza struttura gerarchica interna. Il prefascio  $F_{\text{sin},0}$  assegna:

$$F_{\text{sin},0}(U) = \{\text{sequenze lineari di parole: } w_1 w_2 w_3 \dots\}$$

Non c'è struttura, solo ordine lineare. Le interpretazioni sono basate su euristica di ordine:

"primo nome = agente, verbo, secondo nome = paziente"

Questo funziona per SVO semplici ma fallisce per costruzioni complesse.

Stadio intermedio: Il bambino inizia a riconoscere costituenti, unità sintattiche che si comportano come blocchi. Evidenza include:

- Sostituibilità: "il gatto" e "l'animale" possono sostituirsi in molti contesti
- Movimento insieme: in domande, "il gatto nero" si muove come unità
- Coordinazione: "il gatto e il cane" coordina costituenti paralleli

Il prefascio  $F_{\text{sin},1}$  acquisisce struttura:

$F_{\text{sin},1}(U) = \{\text{alberi parziali con costituenti, ma attaccamenti ambigui}\}$

Ancora prefascio perché attaccamenti sintattici possono essere inconsistenti: lo stesso sintagma potrebbe essere analizzato come attaccato al verbo in un contesto, all'ausiliare in altro, senza coerenza globale.

Stadio maturo: Acquisizione completa di principi sintattici (c-comando, località, movimento, binding). Il fascio  $F_{\text{sin},\infty}$  assegna:

$F_{\text{sin},\infty}(U) = \{\text{strutture sintattiche gerarchiche complete governate da principi universali}\}$

Le mappe di restrizione  $\rho_{U,V}$  sono morfismi che preservano struttura: restringere contestualmente non cambia le relazioni sintattiche strutturali, solo potenzialmente la scelta lessicale o costruzionale.

Il morfismo interpretativo  $\Phi : F_{\text{sin},\infty} \rightarrow F_{\text{sem}}$  mappa sistematicamente sintassi a semantica composizionalmente, rispettando condizioni di fascio in entrambi i domini.

Come si verifica questa transizione? Attraverso:

Bootstrapping statistico: Il bambino identifica pattern ricorrenti nell'input che segnalano struttura. Co-occorrenze frequenti, posizioni distribuzionali, frame sintattici ricorrenti forniscono indizi.

Errori e correzione: Il bambino ipotizza strutture, fa predizioni, e quando predizioni falliscono (enunciati malformati o interpretazioni errate), rivede ipotesi.

Principi innati: Vincoli strutturali universali (struttura gerarchica obbligatoria, località di dipendenze, ciclicità) riducono lo spazio delle grammatiche compatibili con l'input.

Nella teoria dei fasci, i principi innati sono codificati come vincoli topologici: solo certi tipi di fasci sono ammissibili (devono soddisfare condizioni di fascio), solo certi morfismi sono possibili (devono essere continui, compatibili con restrizioni).

L'input fornisce sezioni locali. I vincoli innati determinano quali sheafifications sono possibili. L'apprendimento è il processo di trovare la sheafification ottimale che:

1. Incorpora tutte le sezioni locali fornite dall'input
2. Soddisfa vincoli topologici innati
3. Minimizza ostruzioni coomologiche (massimizza coerenza globale)

Questo è problema di ottimizzazione topologica, formalmente trattabile in linea di principio.



## 19.5 Acquisizione Bilingue: Fasci su Spazi Prodotto e Interferenza Cross-Linguistica

I bambini bilingui acquisiscono simultaneamente due lingue, spesso convergendo su competenze native separate in entrambe, ma mostrando anche fenomeni interessanti di interferenza, code-switching, transfer cross-linguistico.

Nella teoria dei fasci, il bambino bilingue costruisce fasci su spazio prodotto:

$$X_{\text{bilingue}} = X_{L_1} \times X_{L_2}$$

dove  $X_{L_1}$  e  $X_{L_2}$  sono spazi contestuali per le due lingue. Un punto  $(c_1, c_2) \in X_{\text{bilingue}}$  specifica simultaneamente il contesto nella lingua 1 e nella lingua 2.

Il fascio bilingue  $F_{\text{bil}}$  assegna:

$F_{\text{bil}}(U \times V) = \{\text{interpretazioni che coinvolgono potenzialmente materiale da entrambe le lingue}\}$

Le proiezioni:

$$\pi_1 : X_{\text{bilingue}} \rightarrow X_{L_1} \quad \pi_2 : X_{\text{bilingue}} \rightarrow X_{L_2}$$

permettono di isolare le componenti monolingui.

Code-switching (alternanza di codice) è modellato come sezioni sul prodotto che utilizzano materiale da entrambi i fasci monolingui:

$$s \in F_{\text{bil}}(U \times V) \text{ con } s = (s_1 \in F_{L_1}(U), s_2 \in F_{L_2}(V))$$

L'enunciato alterna tra  $L_1$  e  $L_2$ . Le mappe di restrizione devono preservare coerenza: le parti  $L_1$  e  $L_2$  devono essere semanticamente e pragmaticamente compatibili.

Transfer cross-linguistico (applicare pattern di  $L_1$  a  $L_2$ ) corrisponde a pullback:

$$\pi_1^*(F_{L_1}) \rightarrow \text{componente } L_1 \text{ portata su } X_{\text{bilingue}} \quad \pi_2^*(F_{L_2}) \rightarrow \text{componente } L_2 \text{ portata su } X_{\text{bilingue}}$$

Se il bambino applica  $\pi_1^*(F_{L_1})$  quando dovrebbe usare  $\pi_2^*(F_{L_2})$ , produce errori di transfer:

Esempio: Bambino italiano-inglese dice "I have ten years" (transfer da italiano "ho dieci anni") invece di "I am ten years old" (idiomatico inglese).

Analisi: Il fascio italiano  $F_{\text{ita}}$  ha sezione:

$$s_{\text{ita}}(\text{età}) = \text{"avere + numero + anni"}$$

Il bambino applica pullback  $\pi_1^*(s_{\text{ita}})$  allo spazio inglese, producendo traduzione letterale errata invece di usare sezione inglese nativa:

$s\_eng(et\grave{a}) = "be + numero + years old"$

La risoluzione richiede che il bambino apprenda a tenere separati i fasci, applicando solo  $F_{L_1}$  a contesti  $L_1$  e  $F_{L_2}$  a contesti  $L_2$ . Questo corrisponde a "disconnettere" parzialmente il prodotto  $X\_bilingue$  in componenti:

$X\_bilingue \rightarrow X_{L_1} \sqcup X_{L_2}$  (transizione da prodotto a somma disgiunta)

Nel limite maturo, le due lingue sono fasci separati su spazi disgiunti (bilingue coordinato), o fasci con morfismi controllati di traduzione (bilingue composto).

## 19.6 Periodo Critico e Plasticità Topologica: Perché l'Acquisizione Precoce è Privilegiata

Il fenomeno del periodo critico suggerisce che l'acquisizione linguistica nativa è privilegiata durante una finestra temporale limitata (approssimativamente prima della pubertà). Apprendimento tardivo (L2 in età adulta) è qualitativamente diverso, tipicamente meno completo, più faticoso, raramente raggiunge competenza nativa-like.

Nella teoria dei fasci, questa asimmetria temporale può essere spiegata attraverso perdita progressiva di plasticità topologica. Lo spazio contestuale e i fasci definiti su di esso sono inizialmente altamente plastici, flessibili, riorganizzabili. L'apprendimento precoce può modificare:

- La topologia di  $X$  (quali regioni sono aperti, come sono organizzate)
- Le mappe di restrizione (come sezioni si specializzano)
- I morfismi interpretativi (come sintassi mappa a semantica)

Con maturazione neurologica, la plasticità diminuisce. La topologia di  $X$  si "cristallizza", diventando difficile da riorganizzare. I fasci acquisiti precocemente diventano strutture "rigide", resistenti a modifiche.

Formalmente: Definiamo misura di plasticità topologica  $P(t) \in [0,1]$  come funzione dell'età  $t$ :

$P(0) = 1$  (massima plasticità alla nascita)  $P(\text{pubert\grave{a}}) \approx 0,3-0,5$  (plasticità ridotta)  $P(\text{adulto}) \approx 0,1$  (plasticità minima)

L'apprendimento  $L_1$  durante periodo ad alta plasticità può:

- Creare nuovi aperti in  $X$
- Modificare topologia esistente
- Sheafificare prefasci in fasci ottimizzati

L'apprendimento  $L_2$  durante periodo a bassa plasticità deve:

- Lavorare con topologia  $X$  fissata (ottimizzata per  $L_1$ )
- Costruire fasci  $F_{L_2}$  su spazio "alieno" ( $X$  ottimizzato per  $L_1$ , non  $L_2$ )
- Usare morfismi di transfer  $(\pi_1^* : F_{L_1} \rightarrow F_{L_2})$  che sono subottimali

Questo spiega:

Accento straniero permanente: La topologia fonologica di  $X_{\text{fon}}$  è ottimizzata per L1. Fonemi L2 devono essere mappati su categorie fonologiche L1 (pullback), producendo pronuncia non-nativa.

Errori sintattici sistematici L2: Fasci sintattici  $F_{\text{sin},L_2}$  sono costruiti su topologia ottimizzata per  $F_{\text{sin},L_1}$ , creando incompatibilità strutturali.

Fatica cognitiva: Operare su topologia non-ottimale richiede computazione aggiuntiva, generando carico cognitivo.

Ma: la plasticità non scompare completamente. Apprendimento L2 intensivo può indurre riorganizzazioni parziali, specialmente se immersivo. Bilingui equilibrati (acquisizione simultanea precoce di L1 e L2) sviluppano topologia ibrida  $X_{L_1,L_2}$  ottimizzata per entrambe, evitando problemi di periodo critico.

La teoria predice che interventi che aumentano plasticità topologica (farmacologici, tecniche di apprendimento specifiche, immersione totale) dovrebbero facilitare acquisizione L2 tardiva. Alcuni approcci pedagogici (es. Total Physical Response, immersione comunicativa) potrebbero agire indirettamente aumentando plasticità attraverso coinvolgimento multi-modale, contesti ricchi che forzano riorganizzazione.

## **Capitolo 20: Neurolinguistica e Implementazione Cognitiva della Teoria dei Fasci Semantici**

### **Introduzione: Dall'Astrazione Matematica alla Realtà Neurale**

Dopo aver sviluppato con rigore matematico sistematico la teoria dei fasci semantici nei capitoli precedenti, costruendo un apparato formale sofisticato che modella la dipendenza contestuale del significato attraverso strutture topologiche e categoriali, ci troviamo ora di fronte a una questione epistemologica e metodologica cruciale, una domanda che interroga il rapporto stesso tra formalizzazione matematica e realtà cognitiva, tra eleganza teorica e plausibilità neurobiologica, tra modello computazionale astratto e implementazione fisica nel substrato neurale del cervello umano. La domanda, posta nella sua forma più diretta e inevitabile, è la seguente: la teoria dei fasci semantici che abbiamo elaborato è semplicemente uno strumento descrittivo potente, un formalismo matematico che cattura relazioni strutturali tra fenomeni linguistici senza necessariamente corrispondere a meccanismi cognitivi reali, oppure questa teoria ha pretese più forti, più audaci, più impegnative ontologicamente, suggerendo che le strutture di fascio, le topologie contestuali, le mappe di restrizione, gli operatori di incollamento, le ostruzioni coomologiche, non siano mere metafore matematiche ma riflettano effettivamente, in qualche modo non banale, l'architettura computazionale implementata nel tessuto neurale del cervello durante il

processamento linguistico effettivo, durante la produzione e la comprensione del linguaggio naturale in tempo reale?

Questa domanda non è puramente accademica o filosofica ma ha conseguenze metodologiche profonde e immediate per lo sviluppo futuro della teoria. Se adottiamo una posizione strumentalista, trattando i fasci semantici come puri strumenti di modellazione senza impegno ontologico verso i meccanismi cognitivi sottostanti, allora la teoria non è falsificabile empiricamente attraverso evidenze neuroscientifiche, non genera predizioni testabili sui correlati neurali del processamento linguistico, non si espone al rischio di essere contraddetta da scoperte sulla neuroanatomia funzionale del linguaggio. Può essere valutata solo per la sua capacità di catturare generalizzazioni linguistiche, spiegare fenomeni semantici problematici, unificare domini teorici apparentemente disparati, ma rimane nel dominio della linguistica teorica pura, disconnessa dalle scienze cognitive sperimentali.

Se invece adottiamo una posizione più ambiziosa, che potremmo chiamare "realismo computazionale moderato", secondo cui le strutture di fascio non sono implementate letteralmente neurone per neurone nel cervello (cosa ovviamente assurda dato che il cervello non "calcola" con spazi topologici astratti), ma riflettono principi organizzativi genuini, vincoli architettureali reali, pattern computazionali effettivi che governano il processamento semantico neurale a un livello di descrizione appropriato, allora la teoria diventa empiricamente vincolata, genera predizioni verificabili, si integra con le neuroscienze cognitive del linguaggio, può essere supportata o messa in crisi da evidenze sperimentali provenienti da neuroimaging funzionale, registrazioni elettrofisiologiche, studi lesionali, modellazione computazionale neurale.

Questo capitolo adotta esplicitamente la seconda posizione, esplorando sistematicamente come la teoria dei fasci semantici possa essere "naturalizzata", come possiamo identificare correlati neurali plausibili per le strutture matematiche astratte che abbiamo definito, come le operazioni sui fasci (restrizione, incollamento, sheafification, calcolo coomologico) possano corrispondere a processi computazionali neurali implementabili e implementati nel cervello linguistico, e come patologie linguistiche specifiche, deficit selettivi nel processamento semantico, possano essere reinterpretati illuminantemente come danneggiamenti, interruzioni, disfunzioni della struttura di fascio sottostante.

## **20.1 Correlati Neurali della Struttura di Fascio: Dall'Anatomia Funzionale alla Topologia Neurale**

### **20.1.1 Architettura Neurale del Sistema Semantico: Panoramica Empirica**

Prima di proporre corrispondenze specifiche tra strutture di fascio e sistemi neurali, è essenziale stabilire cosa sappiamo empiricamente, sulla base di decenni di ricerca neuroscientifica, sull'organizzazione funzionale del sistema semantico nel cervello umano. La comprensione neuroscientifica contemporanea della semantica, sintetizzando evidenze convergenti da neuroimaging funzionale (fMRI, PET), elettrofisiologia intracranica (registrazioni dirette da elettrodi impiantati in pazienti epilettici), magnetoencefalografia (MEG) ad alta risoluzione temporale, stimolazione magnetica transcranica (TMS) che può

interferire selettivamente con regioni cerebrali specifiche, e studi neuropsicologici classici su pazienti con lesioni focali, delinea un quadro complesso, distribuito, altamente interattivo.

Il sistema semantico non è localizzato in un singolo "centro semantico" unitario, una regione cerebrale discreta deputata esclusivamente alla rappresentazione dei significati, ma emerge piuttosto da un'architettura di rete distribuita che coinvolge molteplici regioni corticali e sottocorticali, ciascuna contribuente aspetti parziali, componenti specifiche della rappresentazione semantica complessiva. Le principali aree implicate, identificate consistentemente attraverso meta-analisi di centinaia di studi di neuroimaging, includono:

**Giro temporale medio e superiore sinistro (MTG/STG sinistra):** Questa regione, situata nella convessità laterale del lobo temporale sinistro, mostra attivazione robusta e consistente durante compiti di processamento semantico di vario tipo, dalla semplice decisione lessicale semantica (è "cane" una parola che denota un animale?) alla comprensione di frasi semanticamente complesse, dalla generazione di associazioni semantiche all'integrazione di significati in contesti narrativi. La localizzazione precisa varia in modo sottile ma sistematico in funzione del tipo di contenuto semantico: rappresentazioni di oggetti concreti manipolabili tendono ad attivare porzioni più anteriori e ventrali del MTG, mentre rappresentazioni di azioni e eventi attivano porzioni più posteriori confinanti con la giunzione temporo-parietale. Studi con stimolazione elettrica corticale diretta durante interventi neurochirurgici hanno dimostrato che interferenza con questa regione produce errori semantici specifici: parafasie semantiche (sostituzioni di parole con altre semanticamente correlate), difficoltà nel recupero lessicale guidato semanticamente, interruzioni nella comprensione di materiale semanticamente denso.

**Giro temporale inferiore e fusiforme ventrale (ITG/FG):** Le superfici ventrali del lobo temporale, in particolare il giro fusiforme e temporale inferiore, mostrano organizzazione categoriale pronunciata della rappresentazione semantica. La celebre "fusiform face area" (FFA), localizzata nella porzione media del giro fusiforme, risponde selettivamente e fortemente a volti umani rispetto ad altri stimoli visivi complessi. Più lateralmente, la "parahippocampal place area" (PPA) risponde preferenzialmente a scene e luoghi. Regioni adiacenti mostrano selettività per categorie semantiche ulteriori: strumenti e oggetti manipolabili attivano porzioni laterali, animali attivano porzioni più mediali. Questa organizzazione categoriale ventrale non è rigidamente modulare (non ci sono confini netti tra "moduli" dedicati a categorie specifiche) ma piuttosto caratterizzata da gradienti sovrapposti, continui, dove la rappresentazione di categorie vicine sfuma gradualmente l'una nell'altra. Questa struttura di gradiente è precisamente il tipo di organizzazione che una topologia continua su spazi semantici può catturare elegantemente.

**Corteccia prefrontale inferiore sinistra (IFG, pars triangularis e orbitalis):** Tradizionalmente associata alla produzione linguistica (area di Broca nella sua definizione classica), la corteccia prefrontale inferiore sinistra è massicciamente implicata anche nel processamento semantico, particolarmente in compiti che richiedono selezione controllata tra competitori semantici, risoluzione di ambiguità, integrazione di informazioni semantiche con vincoli contestuali. L'attivazione della IFG è modulata parametricamente dalla "domanda semantica" del compito: aumenta linearmente con il numero di competitori semantici da cui bisogna selezionare, con il grado di ambiguità lessicale che deve essere risolto, con la complessità dell'integrazione semantica richiesta. Pazienti con lesioni alla IFG mostrano

deficit caratteristici non nella conoscenza semantica di per sé (sanno ancora cosa significa "banco", cosa significa "cane"), ma nell'uso flessibile, controllato, contestualmente appropriato di questa conoscenza: faticano a selezionare tra interpretazioni multiple di parole polisemiche quando il contesto non disambigua fortemente, mostrano perseverazione semantica (continuano a selezionare interpretazioni precedentemente rilevanti anche quando il contesto cambia), hanno difficoltà con materiale semanticamente incongruente che richiede reinterpretazione.

**Giro angolare sinistro (AG, giunzione temporo-parietale):** Il giro angolare, situato alla confluenza dei lobi temporale, parietale e occipitale nella convessità posteriore dell'emisfero sinistro, è implicato essenzialmente in processi di integrazione semantica multi-modale, combinando informazione semantica proveniente da diverse modalità sensoriali e da diverse fonti di conoscenza. L'AG mostra attivazione particolarmente forte durante la comprensione di metafore concettuali, durante l'integrazione di informazioni da testo e immagini, durante compiti che richiedono inferenze semantiche non banali che vanno oltre il significato letterale esplicitamente espresso. Lesioni all'AG producono sindromi caratterizzate da deficit nell'integrazione semantica: i pazienti possono comprendere parole e frasi isolate ma faticano a costruire rappresentazioni semantiche coerenti di testi più lunghi, a integrare significati attraverso frasi consecutive, a fare inferenze che richiedono combinare informazioni da fonti diverse.

**Ippocampo e strutture mediali temporali:** Sebbene classicamente associato alla memoria episodica, l'ippocampo e le strutture corticali mediali temporali adiacenti (corteccia peririnale, parahippocampale) sono sempre più riconosciute come componenti del sistema semantico, particolarmente per rappresentazioni semantiche ricche, dettagliate, multimodali che incorporano informazioni contestuali specifiche. L'ippocampo potrebbe implementare una forma di "memoria semantica contestualizzata", rappresentando non significati astratti decontestualizzati ma piuttosto episodi semantici, situazioni prototipiche, scenari schematici che incorporano strutture contestuali. Le lesioni ippocampali bilaterali, oltre ai ben noti deficit di memoria episodica, producono anche deficit semantici sottili ma misurabili, particolarmente per conoscenze semantiche acquisite recentemente, per dettagli semantici fini, per relazioni semantiche che dipendono da configurazioni contestuali specifiche piuttosto che da associazioni stabili decontestualizzate.

**Connettività funzionale e fascicoli di sostanza bianca:** Crucialmente, queste regioni non operano in isolamento ma formano una rete altamente interconnessa, con connettività funzionale (correlazioni nelle dinamiche di attivazione tra regioni) e connettività strutturale (fascicoli di fibre di sostanza bianca che connettono fisicamente le regioni). Il fascicolo longitudinale superiore (SLF), il fascicolo arcuato, il fascicolo uncinato, il fascicolo longitudinale inferiore, formano autostrade di comunicazione neurale che permettono trasmissione rapida di informazione tra i nodi della rete semantica. Studi di tractografia con diffusion tensor imaging (DTI) rivelano che la robustezza microstrutturale di questi fascicoli (misurata da parametri come anisotropia frazionale) predice performance in compiti semantici: individui con fascicoli più integri mostrano processamento semantico più efficiente, veloce, accurato.

### 20.1.2 Lo Spazio Contestuale X come Spazio di Stati Neurali Distribuiti

Con questo quadro empirico come sfondo, proponiamo ora una corrispondenza esplicita tra lo spazio topologico contestuale  $X$  che abbiamo definito matematicamente nei capitoli precedenti e configurazioni neurali effettive nel cervello linguistico. La proposta centrale, l'ipotesi cardine della naturalizzazione neurale della teoria dei fasci semantici, è la seguente: lo spazio contestuale  $X$  non è una astrazione puramente matematica senza controparte fisica, ma corrisponde allo spazio degli stati neurali distribuiti possibili che la rete semantica cerebrale può assumere durante il processing linguistico in tempo reale.

Più precisamente, ogni punto  $c$  in  $X$ , che matematicamente rappresenta un contesto comunicativo completamente specificato (una tupla di coordinate contestuali includente componenti linguistica, situazionale, sociale, culturale, conversazionale, epistemica), corrisponde neuralmente a un vettore di attività neurale  $N(c)$  nello spazio degli stati del sistema semantico cerebrale. Questo vettore  $N(c)$  specifica i pattern di attivazione simultanea attraverso tutte le popolazioni neuronali rilevanti nelle regioni elencate sopra: il livello di attività dei neuroni nel MTG sinistro che rappresentano proprietà semantiche specifiche, il pattern di attivazione nel giro fusiforme che codifica categorie semantiche, lo stato della corteccia prefrontale che riflette processi di controllo semantico, le oscillazioni ippocampali che modulano accesso a memorie semantiche contestuali.

Formalmente, se denotiamo con  $N$  l'insieme di tutte le possibili configurazioni di attività neurale nel sistema semantico (uno spazio vettoriale ad alta dimensione, tipicamente centinaia di migliaia a milioni di dimensioni se consideriamo attività di singoli neuroni, o migliaia di dimensioni se consideriamo attività aggregata di popolazioni neuronali), allora proponiamo l'esistenza di una mappa:

$$\Phi: X \rightarrow N$$

che associa a ogni contesto astratto  $c$  in  $X$  una configurazione neurale concreta  $N(c)$  in  $N$ . Questa mappa  $\Phi$  è la "implementazione neurale" dello spazio contestuale.

Crucialmente, la topologia su  $X$ , che abbiamo definito matematicamente attraverso relazioni di inclusione, sovrapposizione, vicinanza tra contesti, deve corrispondere a una geometria naturale sullo spazio neurale  $N$ . Specificatamente, se due contesti  $c_1$  e  $c_2$  sono topologicamente vicini in  $X$  (appartengono a molti aperti comuni, ovvero condividono molte caratteristiche contestuali), allora le loro implementazioni neurali  $\Phi(c_1)$  e  $\Phi(c_2)$  devono essere vicine nello spazio neurale  $N$  secondo qualche metrica neurale appropriata. Questa metrica neurale potrebbe essere:

**Distanza euclidea nei vettori di attivazione:** Se rappresentiamo  $N(c)$  come vettore in  $\mathbb{R}^n$  dove  $n$  è il numero di unità neuronali considerate e ogni componente  $N_i(c)$  è il firing rate (tasso di scarica) del neurone  $i$  nel contesto  $c$ , allora la distanza euclidea standard:

$$d_{\text{eucl}}(N(c_1), N(c_2)) = \sqrt{\sum_i (N_i(c_1) - N_i(c_2))^2}$$

misura quanto le configurazioni neurali differiscono in termini di attività neuronale complessiva. Contesti topologicamente vicini dovrebbero produrre configurazioni neurali con distanza euclidea piccola.

**Correlazione tra pattern:** Alternativamente, possiamo misurare similarità tra stati neurali attraverso correlazione di Pearson dei vettori di attivazione:

$$\rho(N(c_1), N(c_2)) = \text{cov}(N(c_1), N(c_2)) / (\sigma(N(c_1)) \cdot \sigma(N(c_2)))$$

dove cov è covarianza e  $\sigma$  è deviazione standard. Alta correlazione ( $\rho$  vicino a 1) indica pattern di attivazione simili anche se le magnitudini assolute differiscono.

**Metriche di rappresentazione multivariate:** Tecniche più sofisticate come Representational Similarity Analysis (RSA) costruiscono matrici di dissimilarità tra tutti i pattern neurali considerati e confrontano la geometria di queste matrici. Se la matrice di dissimilarità neurale (basata su attività cerebrale misurata con fMRI o MEG) è isomorfa alla matrice di dissimilarità contestuale (basata sulla topologia di  $X$ ), abbiamo evidenza forte che la topologia astratta è implementata neuralmente.

### 20.1.3 Aperti Contestuali come Bacini di Attrazione Neurali

Gli aperti  $U \subseteq X$  nella topologia contestuale, che matematicamente rappresentano "regioni" o "famiglie coerenti" di contesti che condividono proprietà rilevanti, hanno una controparte neurale naturale e profonda: i bacini di attrazione nella dinamica neurale del sistema semantico.

La rete semantica cerebrale, vista come sistema dinamico, evolve nel tempo seguendo equazioni dinamiche (tipicamente equazioni differenziali non lineari accoppiate per popolazioni neuronali interconnesse, per esempio modelli tipo Hopfield, reti attrattive, reti di Wilson-Cowan). Questi sistemi dinamici neurali possono avere molteplici punti fissi stabili, ciascuno corrispondente a una "configurazione semantica stabile", un "significato cristallizzato". Il bacino di attrazione di un punto fisso  $N^*$  è l'insieme di tutti gli stati neurali  $N_0$  da cui, se il sistema parte da  $N_0$ , la dinamica neurale converge asintoticamente verso  $N^*$ .

Proponiamo che gli aperti contestuali  $U \subseteq X$  corrispondano ai bacini di attrazione neurali  $B(N^*)$  di punti fissi semantici stabili. Più precisamente, se  $\Phi: X \rightarrow N$  è la mappa di implementazione neurale, allora per ogni aperto  $U$  in  $X$  esiste un bacino di attrazione  $B$  nel sistema dinamico neurale tale che:

$$\Phi(U) \subseteq B$$

Ovvero, tutti i contesti nell'aperto  $U$  si mappano a stati neurali che appartengono a un bacino di attrazione comune, convergendo verso la stessa configurazione semantica stabile.

Questa corrispondenza illumina il significato cognitivo profondo degli aperti: un aperto  $U$  rappresenta una famiglia di contesti che, nonostante possibili variazioni superficiali, condividono una struttura semantica profonda sufficiente a guidare il sistema neurale verso lo stesso "attrattore semantico", la stessa interpretazione stabile.

Consideriamo l'esempio paradigmatico della parola polisemica "banco" discussa estensivamente nei capitoli precedenti. Abbiamo definito aperti contestuali  $U_{\text{banca}}$  (contesti bancari),  $U_{\text{scuola}}$  (contesti scolastici),  $U_{\text{mercato}}$  (contesti commerciali),



ciascuno corrispondente a una diversa interpretazione della parola. Neuralmente, questi aperti corrispondono a bacini di attrazione distinti nel sistema semantico:

**B\_banco\_bancario:** Bacino di attrazione corrispondente all'interpretazione "sportello bancario". Gli stati neurali in questo bacino sono caratterizzati da pattern di attivazione che includono: (a) neuroni nel MTG sinistro che rappresentano concetti finanziari (denaro, transazione, conto); (b) neuroni nel giro fusiforme che rappresentano configurazioni visive di ambienti bancari (sportelli, file di attesa, impiegati); (c) neuroni nella corteccia prefrontale che codificano frame semantici di transazioni commerciali formali; (d) connettività aumentata con regioni che rappresentano contesti sociali istituzionali.

**B\_banco\_scolastico:** Bacino di attrazione per l'interpretazione "banco scolastico". Pattern neurali distinti che includono: (a) neuroni MTG per concetti educativi (studente, lezione, quaderno); (b) rappresentazioni fusiformi di setting scolastici; (c) frame semantici di attività didattiche; (d) connettività con regioni che codificano contesti sociali gerarchici studente-insegnante.

**B\_banco\_mercato:** Bacino per "banco di vendita al mercato", con terzo pattern caratteristico.

Quando il sistema neurale riceve input linguistico contenente la parola "banco" in un contesto  $c$ , l'implementazione neurale  $\Phi(c)$  specifica uno stato neurale iniziale  $N_0 = \Phi(c)$ . La dinamica neurale successiva, guidata dalle connessioni sinaptiche e dalle interazioni ricorrenti nella rete semantica, fa evolvere questo stato iniziale. Se il contesto  $c$  appartiene all'aperto  $U_{\text{banca}}$ , allora  $N_0$  cade nel bacino  $B_{\text{banco\_bancario}}$ , e la dinamica converge all'attrattore corrispondente, producendo l'interpretazione bancaria. Se  $c \in U_{\text{scuola}}$ ,  $N_0$  cade in  $B_{\text{banco\_scolastico}}$ , convergendo all'interpretazione scolastica.

Contesti ambigui, che appartengono all'intersezione di aperti ( $U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}$ ), corrispondono a stati neurali  $N_0$  che cadono in regioni di confine tra bacini, vicino ai "separatori" (separatrici) che dividono bacini diversi. In queste regioni, piccole perturbazioni possono spingere il sistema in un bacino o nell'altro, producendo bistabilità percettiva, ambiguità irrisolta, competizione prolungata tra interpretazioni.

#### 20.1.4 Mappe di Restrizione come Modulazione Top-Down e Raffinamento Attentivo

Le mappe di restrizione  $p_{\{U,V\}}: F(U) \rightarrow F(V)$  per  $V \subseteq U$ , operazioni matematiche centrali nella teoria dei fasci che specializzano sezioni su aperti grandi a sezioni su aperti più piccoli, hanno una interpretazione neurale ricca in termini di modulazione top-down e raffinamento attentivo guidato da controllo cognitivo.

Quando specializziamo un contesto da una regione ampia  $U$  a una regione più ristretta  $V \subseteq U$  (per esempio, da "contesti educativi generali" a "contesti di lezione universitaria di matematica avanzata"), neuralmente questo corrisponde a un processo di raffinamento progressivo della rappresentazione semantica guidato da segnali di controllo discendenti (top-down) dalla corteccia prefrontale alle regioni semantiche posteriori temporali.

Il meccanismo neurale proposto è il seguente:

**Fase 1 - Attivazione iniziale ampia:** L'input linguistico, processato attraverso vie ascendenti (bottom-up) dal sistema uditivo o visivo attraverso corteccie sensoriali primarie a corteccie associative multimodali, attiva inizialmente un ampio insieme di rappresentazioni semantiche nel MTG/ITG corrispondente all'aperto ampio U. Questa attivazione iniziale è relativamente grossolana, non selettiva, distribuita su molte interpretazioni potenziali compatibili con l'input lessicale e sintattico ma non ancora modulate da contesto dettagliato.

**Fase 2 - Segnali contestuali dalla corteccia prefrontale:** Simultaneamente o immediatamente dopo l'attivazione bottom-up, la corteccia prefrontale (IFG, DLPFC), che mantiene rappresentazioni esplicite del contesto corrente della conversazione (scopi comunicativi, storia discorsiva, ruoli sociali, setting situazionale), invia segnali top-down modulatori alle regioni semantiche posteriori. Questi segnali, implementati fisiologicamente attraverso proiezioni glutammatergiche eccitatore e attraverso modulazione di oscillazioni neurali in bande di frequenza specifiche (theta, alpha, beta), modificano selettivamente l'eccitabilità di popolazioni neurali nelle aree semantiche.

**Fase 3 - Competizione e selezione:** I segnali top-down contestuali aumentano l'eccitabilità di neuroni che rappresentano interpretazioni coerenti con il contesto ristretto V, e simultaneamente sopprimono (attraverso inibizione mediata da interneuroni GABAergici) neuroni che rappresentano interpretazioni incompatibili con V. Questo crea competizione neurale, dove popolazioni neurali compatibili con il contesto ristretto ricevono vantaggio competitivo e sopprimono attivamente competitori attraverso inibizione laterale reciproca.

**Fase 4 - Convergenza a stato raffinato:** La dinamica competitiva converge a una configurazione neurale stabile che codifica l'interpretazione semantica specifica appropriata al contesto ristretto V. Questo stato finale corrisponde alla sezione ristretta  $\rho_{\{U,V\}}(s)$  dove s era la sezione originale ampia su U.

Evidenza empirica per questo meccanismo proviene da molteplici fonti:

**Studi fMRI di risoluzione di ambiguità:** Esperimenti che presentano parole ambigue (per esempio, "bank" in inglese che può significare riva o banca) in contesti che disambiguano progressivamente mostrano pattern temporali caratteristici: attivazione iniziale diffusa in MTG bilateralmente, seguita da modulazione prefrontale (attivazione IFG aumenta quando il contesto disambigua), seguita da risoluzione con attivazione focale nel MTG corrispondente all'interpretazione contestualmente appropriata. Il time-course di questo processo, misurato con risoluzione temporale fine usando MEG, mostra che i segnali prefrontali precedono temporalmente (di circa 100-200 millisecondi) la risoluzione semantica finale nelle regioni temporali, consistente con modulazione top-down.

**Manipolazione con TMS:** Studi di stimolazione magnetica transcranica che interferiscono selettivamente con la corteccia prefrontale durante compiti di processamento semantico contestuale mostrano che disabilitazione temporanea della IFG (attraverso pulsati TMS ripetitivi che creano "lesioni virtuali" transitorie) compromette specificamente la capacità di utilizzare contesto per selezionare tra interpretazioni competitive, senza compromettere accesso semantico di base. Questo implica che la IFG implementa il processo di restrizione contestuale, il raffinamento guidato da contesto che corrisponde formalmente alle mappe  $\rho_{\{U,V\}}$ .

**Registrazioni elettrofisiologiche intracraniche:** Studi rari ma preziosissimi su pazienti epilettici con elettrodi impiantati nel cervello per localizzazione di foci epilettici permettono registrazioni dirette dell'attività neurale con risoluzione spaziale e temporale eccellente. Questi studi mostrano che neuroni individuali nel MTG e nell'ITG rispondono selettivamente a categorie semantiche specifiche, e che questa selettività è modulata dinamicamente da contesto: lo stesso neurone può rispondere fortemente a "banco" in contesto bancario ma debolmente in contesto scolastico, o viceversa. La modulazione temporale mostra che la selettività contestuale emerge circa 200-400 ms dopo presentazione dello stimolo, dopo l'attivazione iniziale grossolana, consistente con processo di affinamento.

### **20.1.5 Incollamento e Sheafification come Integrazione Neurale e Risoluzione di Conflitti**

L'operazione di incollamento (gluing) nella teoria dei fasci, che combina sezioni locali compatibili definite su una copertura  $\{U_i\}$  di un aperto  $U$  per formare una sezione globale unica su  $U$ , e la sheafification, che regolarizza prefasci per soddisfare la condizione di fascio, hanno controparti neurali in processi di integrazione neurale multi-regionale e risoluzione di conflitti interpretativi.

Neuralmente, il processo di incollamento corrisponde al problema computazionale seguente: il sistema semantico ha costruito rappresentazioni parziali, locali, del significato in diverse regioni cerebrali (MTG per proprietà semantiche lessicali, fusiforme per categorie, IFG per relazioni, AG per integrazioni multi-modalità, ippocampo per informazioni episodiche contestuali), e deve integrare queste rappresentazioni parziali in una rappresentazione semantica globale coerente che "vive" nello spazio di attività congiunta della rete distribuita.

Il meccanismo neurale di integrazione sfrutta la connettività ricorrente massiccia tra le regioni della rete semantica. Le proiezioni forward (da regioni posteriori a anteriori) e feedback (da anteriori a posteriori), insieme a connessioni laterali tra regioni dello stesso livello gerarchico, implementano un processo iterativo di "negoiazione" tra rappresentazioni locali:

**Iterazione 1 - Rappresentazioni locali iniziali:** Ciascuna regione genera una rappresentazione semantica basata sulla sua "prospettiva" specializzata. MTG attiva rappresentazioni lessicali compatibili con l'input, fusiforme attiva categorie semantiche, IFG attiva frame relazionali, ecc. Queste rappresentazioni locali sono analoghe alle sezioni locali  $s_i \in F(U_i)$ .

**Iterazione 2 - Comunicazione e rilevazione di incompatibilità:** Le regioni comunicano le loro rappresentazioni tramite connessioni sinaptiche. Quando rappresentazioni provenienti da regioni diverse arrivano a una regione integrativa (tipicamente aree associative multimodali come il giro angolare o corteccie prefrontali laterali), vengono confrontate per compatibilità. Incompatibilità (corrispondenti a sezioni locali che non soddisfano la condizione di compatibilità sulle sovrapposizioni) generano segnali di "errore di predizione" o "sorpresa" codificati da neuroni che rispondono a discrepanze tra attività attesa e attività effettiva.

**Iterazione 3 - Aggiustamento e convergenza:** I segnali di errore innescano aggiustamenti nelle rappresentazioni locali. Regioni modificano le loro attività per ridurre discrepanze, attraverso meccanismi di apprendimento hebbiano (connessioni tra neuroni che si attivano insieme si rafforzano, connessioni tra neuroni con attività discordanti si indeboliscono) e attraverso modulazione da regioni di controllo che implementano meta-rappresentazioni di coerenza. Questo processo iterativo, implementato neuralmente attraverso dinamiche ricorrenti rapide (nell'ordine di decine a centinaia di millisecondi), converge a una configurazione globale stabile dove le rappresentazioni locali sono mutuamente compatibili.

**Risoluzione o fallimento:** Se le rappresentazioni locali sono fundamentalmente compatibili (soddisfano la condizione di incollamento), il processo converge a una rappresentazione globale coerente. Se le rappresentazioni locali sono incompatibili (violano la condizione di incollamento), il processo può non convergere, rimanendo in oscillazione tra configurazioni, o convergere a una rappresentazione parziale "best compromise" che non soddisfa perfettamente tutti i vincoli. Questo ultimo caso corrisponde neuralmente alla sheafification: il sistema trova la "migliore approssimazione" di una rappresentazione globale anche quando l'incollamento perfetto non è possibile.

Evidenza per questa interpretazione neurale dell'incollamento viene da studi di connettività effettiva che misurano la direzione e la forza della comunicazione causale tra regioni cerebrali durante processamento semantico. Tecniche come Granger causality applicata a dati fMRI, o modelli di Dynamic Causal Modeling (DCM), rivelano che durante comprensione di frasi semanticamente complesse, la connettività tra regioni della rete semantica aumenta drammaticamente, particolarmente le connessioni ricorrenti bidirezionali tra MTG, AG, e IFG. Inoltre, la forza di questa connettività predice success nell'integrazione semantica: individui con connettività più robusta mostrano migliore comprensione, mentre pazienti con lesioni che interrompono fascicoli di sostanza bianca tra regioni semantiche mostrano deficit caratteristici nell'integrazione (possono comprendere parole e frasi semplici ma faticano con materiale che richiede integrazione complessa).

### 20.1.6 Ostruzioni Coomologiche come Attività Neurale di "Errore Semantico"

Le ostruzioni coomologiche, misurate formalmente dai gruppi di coomologia  $H^n(X, F)$  nella teoria dei fasci, che quantificano l'impossibilità di incollare sezioni locali compatibili in sezioni globali, hanno una controparte neurale particolarmente affascinante e sperimentalmente testabile: pattern di attività neurale che codificano "errore semantico", "incoerenza semantica", "sorpresa semantica", rilevabili con alta precisione temporale usando elettrofisiologia.

Quando il sistema semantico incontra materiale linguistico che presenta incompatibilità semantiche, contraddizioni, violazioni di aspettative semantiche basate su contesto, genera segnali neurali caratteristici che possono essere misurati nel cuoio capelluto usando elettroencefalografia (EEG) o magnetoencefalografia (MEG). Il componente ERP (Event-Related Potential, potenziale evento-relato) più rilevante è la celebre N400.

**La N400 come marcatore di ostruzione coomologica:** La N400 è una deflessione negativa nel potenziale elettrico registrato al cuoio capelluto che raggiunge il suo picco circa

400 millisecondi dopo presentazione di uno stimolo semantico, con distribuzione topografica centro-parietale (massima nelle elettrodi centrali e parietali del cuoio capelluto). L'ampiezza della N400 è modulata sistematicamente dalla "difficoltà semantica": è più grande (più negativa) per parole semanticamente incongruenti o inaspettate nel loro contesto rispetto a parole semanticamente congruenti e attese.

L'esempio paradigmatico è il confronto tra frasi come:

"Il caffè viene servito con zucchero e latte" (congruente, N400 piccola) "Il caffè viene servito con zucchero e calze" (incongruente, N400 grande)

La parola "calze" genera N400 massiva perché semanticamente incompatibile con il frame semantico di "servire caffè" stabilito dal contesto precedente.

Proponiamo che l'ampiezza della N400 sia un correlato neurale diretto, misurabile, quantificabile, dell'ostruzione coomologica che impedisce l'incollamento di rappresentazioni semantiche locali. Formalmente, se  $\delta^0(s)$  misura l'ostruzione (il cobordo che deve essere zero per incollamento), allora l'ampiezza della N400 è funzione monotona di  $||\delta^0(s)||$ , la norma dell'ostruzione.

Più precisamente, quando il sistema processa "Il caffè viene servito con zucchero e calze", costruisce rappresentazioni semantiche locali:

- $U_1$  (contesto "caffè servito"): attiva frame semantico di bevande calde, accompagnamenti tipici (latte, zucchero, panna)
- $U_2$  (parola "calze"): attiva rappresentazioni di indumento per i piedi

Queste due rappresentazioni locali sono fondamentalmente incompatibili quando si tenta di integrarle:  $\delta^0(s_{\text{caffè}}, s_{\text{calze}}) \neq 0$

L'incompatibilità genera errore di predizione codificato neuralmente. I neuroni nelle regioni semantiche (MTG, AG) che "si aspettavano" attivazione di rappresentazioni compatibili con il frame del caffè (come "latte") ricevono invece input corrispondente a "calze". Questa discrepanza tra predizione e realtà genera attività neurale aumentata in popolazioni neuronali che codificano errori, manifestandosi come N400 ampia.

Evidenza a supporto di questa interpretazione:

- **Gradualità della N400:** L'ampiezza N400 non è binaria (presente/assente) ma graduata, scalando continuamente con il grado di violazione semantica. Parole parzialmente incompatibili generano N400 intermedie. Questo parallela la struttura graduata delle ostruzioni coomologiche (possono essere "piccole" o "grandi").
- **Sensibilità contestuale:** La N400 per la stessa parola varia drasticamente con il contesto. "Calze" in "Il caffè viene servito con calze" genera N400 enorme, ma in "Per Natale ho ricevuto calze e guanti" genera N400 minima. Questo riflette che l'ostruzione dipende dal contesto (dalla topologia degli aperti coinvolti).
- **Localizzazione delle sorgenti:** Studi di source localization che ricostruiscono le sorgenti corticali generanti la N400 identificano contributi primari dal MTG sinistro,

AG, e IFG - precisamente le regioni della rete semantica che implementano l'integrazione e dove le ostruzioni emergerebbero.

Oltre alla N400, altri componenti ERP sono rilevanti:

- **P600**: Componente positivo tardivo (picco a 600 ms) associato a reanalisi e riparazione semantica/sintattica. Potrebbe corrispondere a tentativi del sistema di "sheafificare" rappresentazioni incompatibili, trovando approssimazioni coerenti.
- **Sustained negativity**: In casi di violazioni semantiche estreme, irrisolvibili, emerge negatività sostenuta prolungata (durata centinaia di millisecondi), possibilmente riflettendo persistenza dell'ostruzione, fallimento a convergere a rappresentazione globale.

## 20.2 Processamento Temporale e Restrizioni Contestuali: Dinamiche Neurali e Vincoli Temporal

### 20.2.1 La Dimensione Temporale del Processamento Semantico: Evidenze Comportamentali e Neurali

Il processamento semantico non è istantaneo ma si dispiega nel tempo attraverso una cascata complessa di operazioni computazionali che procedono serialmente, in parallelo, e con interazioni ricorrenti. Comprendere la struttura temporale di questo processo è cruciale per validare la teoria dei fasci semantici neuralmente, perché le operazioni matematiche che abbiamo definito (restrizione, incollamento, calcolo di ostruzioni) devono avere signature temporali specifiche, misurabili, distinguibili sperimentalmente.

Evidenze comportamentali da esperimenti di priming semantico, decisione lessicale, e tempo di reazione in comprensione di frasi rivelano che il processamento semantico opera su scale temporali multiple:

**Accesso lessicale rapido (100-200 ms)**: L'attivazione iniziale di rappresentazioni lessicali in risposta a input uditivi o visivi è estremamente rapida. Studi ERP mostrano che differenze lessicali (parola reale vs. pseudoparola) emergono già a 100 ms in componenti come N1. L'attivazione semantica iniziale, grossolana, emerge entro 200 ms, evidenziata da effetti di priming semantico: una parola target (es. "cane") viene riconosciuta più velocemente se preceduta da un prime semanticamente correlato (es. "gatto") rispetto a un prime non correlato (es. "sedia"), e questa facilitazione è misurabile già con SOA (Stimulus Onset Asynchrony) di 200 ms.

**Integrazione contestuale (200-400 ms)**: L'integrazione di significati lessicali con contesto di frase emerge in finestra temporale successiva. La N400 (picco 400 ms) è il marcatore paradigmatico. Esperimenti che manipolano sistematicamente aspetti contestuali mostrano che effetti di contesto sull'ampiezza N400 richiedono circa 200-300 ms di processamento post-onset della parola critica.

**Reanalisi e riparazione (400-800 ms)**: Quando il processamento iniziale conduce a interpretazioni problematiche (garden-path sentences, violazioni semantiche, ambiguità

irrisolte), processi di reanalisi intervengono in fase tardiva, riflessi in componenti ERP come P600 (picco 600 ms) e sustained negativity prolungata.

**Consolidamento e storage (>800 ms):** Rappresentazioni semantiche definitivamente costruite vengono consolidate per retention in memoria a lungo termine, processi che si estendono oltre il secondo e coinvolgono interazioni con ippocampo e strutture mediali temporali.

Queste scale temporali forniscono vincoli per modelli neurali delle operazioni sui fasci.

### 20.2.2 Mappe di Restrizione come Processi Dinamici: Modulazione Temporale dell'Attività Neurale

Le mappe di restrizione  $p_{\{U,V\}}: F(U) \rightarrow F(V)$  per  $V \subseteq U$ , che specializzano sezioni da aperti ampi a aperti ristretti, non sono operazioni istantanee nel cervello ma processi dinamici che si dispiegano temporalmente attraverso modulazione progressiva di pattern neurali.

Proponiamo un modello temporale esplicito del processo di restrizione:

**t = 0 ms (onset dello stimolo):** Input linguistico (parola o frase) viene presentato. Processamento sensoriale periferico inizia (analisi acustica nell'udito, analisi visiva ortografica nella lettura).

**t = 50-100 ms:** Informazione linguistica raggiunge cortecce sensoriali secondarie e associative. Attivazione grossolana, non selettiva, di rappresentazioni lessicali candidate nel MTG. Corrisponde a stato neurale  $N(c_0)$  dove  $c_0$  è un contesto "ancora indeterminato", massimamente ampio. Il sistema è nell'aperto  $U_{\max}$  che non specifica quasi nessun vincolo contestuale.

**t = 100-200 ms:** Inizio della modulazione contestuale. Corteccia prefrontale, che mantiene rappresentazioni del contesto conversazionale/situazionale corrente, inizia a inviare segnali top-down al MTG e altre regioni semantiche. Questi segnali corrispondono alla "selezione dell'aperto ristretto"  $V \subseteq U_{\max}$ : il sistema identifica quale famiglia di contesti è rilevante basandosi su cue contestuali.

**t = 200-400 ms:** Applicazione attiva della restrizione. L'attività neurale nel MTG si modifica progressivamente: popolazioni neuronali che rappresentano interpretazioni incompatibili con  $V$  vengono sopresse (via inibizione), popolazioni compatibili con  $V$  vengono potenziate (via facilitazione). Questo processo è visibile nelle dinamiche temporali dell'attività neurale registrata con MEG ad alta risoluzione temporale: inizialmente l'attivazione è distribuita ampiamente attraverso molteplici rappresentazioni semantiche, poi progressivamente si focalizza, si restringe, converge a una rappresentazione specifica. Il processo corrisponde matematicamente alla mappa  $p_{\{U_{\max}, V\}}$ .

**t = 400-600 ms:** Stabilizzazione della rappresentazione ristretta. Lo stato neurale converge a  $N(c_V)$  dove  $c_V \in V$  è il contesto specifico, specializzato. Questa configurazione neurale codifica la sezione ristretta  $p_{\{U,V\}}(s)$ . Se la restrizione ha successo (i vincoli contestuali disambiguano completamente), l'attività si stabilizza in configurazione robusta. Se residua

ambiguità ( $V$  ancora contiene molteplici contesti incompatibili), l'attività può oscillare o rimanere instabile.

**$t > 600$  ms:** Consolidamento ed eventuale reanalisi se la prima restrizione era inappropriata.

Evidenze per questo modello temporale:

**Studi MEG time-resolved:** Esperimenti MEG che presentano parole ambigue in contesti disambiguanti e ricostruiscono dinamiche temporali dell'attivazione nel MTG mostrano esattamente il pattern predetto: attivazione iniziale ( $t < 200$  ms) distribuita su multiple interpretazioni, seguita da focalizzazione progressiva (200-400 ms) sull'interpretazione contestualmente appropriata. La velocità della focalizzazione è modulata dalla "forza" del contesto: contesti altamente disambiguanti producono focalizzazione rapida (completata a  $t \approx 300$  ms), contesti deboli producono focalizzazione lenta o incompleta.

**Manipolazione temporale di cue contestuali:** Esperimenti che manipolano quando informazione contestuale disambiguante viene presentata (prima vs. dopo la parola ambigua) mostrano effetti temporali predetti: se il contesto precede, la restrizione avviene rapidamente; se il contesto segue, c'è inizialmente attivazione di multiple interpretazioni seguita da restrizione ritardata quando il contesto disambiguante arriva. Questo è consistente con il modello che la restrizione richiede segnali top-down dalla prefrontale, e questi segnali possono essere generati solo quando informazione contestuale è stata processata.

**Modellazione computazionale neurale:** Modelli di reti neurali artificiali che implementano architetture con componenti bottom-up (da input a rappresentazioni semantiche) e top-down (da rappresentazioni contestuali a modulazione di semantica) riproducono i time-course osservati empiricamente quando addestrati su dati linguistici. Questi modelli forniscono proof-of-concept che mappe di restrizione sono implementabili neuralmente attraverso modulazione top-down temporalmente estesa.

### 20.2.3 Composizionalità Temporale: $\rho_{\{U,W\}} = \rho_{\{V,W\}} \circ \rho_{\{U,V\}}$ e Cascade di Raffinamento

L'assioma di composizionalità delle mappe di restrizione nella teoria dei fasci, che stabilisce che restrizioni possono essere composte transitivamente (se  $W \subseteq V \subseteq U$ , allora  $\rho_{\{U,W\}} = \rho_{\{V,W\}} \circ \rho_{\{U,V\}}$ ), ha predizione temporale neurale specifica: il raffinamento contestuale può procedere attraverso stadi intermedi o direttamente, e il risultato finale deve essere identico indipendentemente dal percorso.

Neuralmente, questo si traduce nel fatto che il sistema può specializzare il contesto in un colpo solo (transizione diretta da  $U_{\text{ampio}}$  a  $W_{\text{ristretto}}$ ) oppure attraverso raffinamenti intermedi (prima  $U \rightarrow V$ , poi  $V \rightarrow W$ ), e lo stato neurale finale deve essere lo stesso.

Esperimenti comportamentali supportano questa predizione. Consideriamo processamento di frasi con raffinamento contestuale progressivo:

"Lo studente ha aperto..."



A questo punto, contesto è  $U_{\text{educativo}}$  (attività educative generiche). Molti complementi compatibili.

"Lo studente ha aperto il libro..."

Contesto si restringe a  $V_{\text{studio}}$  (studio/lettura). Il verbo "aprire" viene interpretato nel senso di iniziare a leggere.

"Lo studente ha aperto il libro di matematica avanzata durante l'esame finale."

Contesto si restringe ulteriormente a  $W_{\text{esame\_matematica}}$  (contesto ultra-specifico di esame).

Il modello predice che l'interpretazione finale (stato neurale al tempo  $t$  finale dopo processamento dell'intera frase) deve essere identica sia se il sistema raffina progressivamente ( $U \rightarrow V \rightarrow W$ ) sia se, ipoteticamente, potesse "saltare" direttamente a  $W$  con sufficiente informazione contestuale pre-attivata.

Sperimentalmente, possiamo testare questo presentando varianti di frasi dove informazione contestuale disambiguante arriva in ordini diversi o con timing diversi. La composizionalità temporale predice che lo stato neurale finale, misurato dopo che tutta l'informazione è stata integrata, deve essere invariante rispetto all'ordine/timing (assumendo tempo sufficiente per convergenza). Misurazioni MEG di pattern neurali in finestre temporali tardive ( $t > 600$  ms) confermano questa predizione: pattern finali sono simili indipendentemente da come l'ambiguità è stata risolta lungo il percorso.

#### 20.2.4 Incollamento Temporale: Integrazione Incrementale e Convergenza Dinamica

L'incollamento di sezioni locali per formare sezioni globali, operazione centrale nella teoria dei fasci, ha dinamica temporale particolarmente ricca perché richiede coordinazione tra regioni cerebrali multiple che operano in parallelo con scale temporali diverse.

Il processo neurale di incollamento durante comprensione di frasi procede incrementalmente, parola per parola, con integrazione progressiva:

**$t = 0$ :** Inizio della frase. Nessuna rappresentazione semantica ancora costruita. Stato neutro.

**$t = t_1$  (dopo parola 1):** Prima parola processata. Attiva rappresentazione semantica locale  $s_1$  in regione  $R_1$  (per esempio, MTG per il significato lessicale della parola).

**$t = t_2$  (dopo parola 2):** Seconda parola attiva rappresentazione  $s_2$  in  $R_1$  o altra regione  $R_2$ . Sistema deve ora integrare  $s_1$  e  $s_2$ . Verifica compatibilità:  $s_1|_{\{U_1 \cap U_2\}} = s_2|_{\{U_1 \cap U_2\}}$ ? Se sì, inizia processo di incollamento. Se no, genera segnale di errore (N400).

**$t = t_3, t_4, \dots$  (parole successive):** Ogni nuova parola aggiunge sezione locale che deve essere integrata con la rappresentazione parziale già costruita. Il processo è iterativo: la rappresentazione globale parziale al tempo  $t_i$  funge da contesto per integrare la sezione locale al tempo  $t_{i+1}$ .

**t = t\_finale (fine frase):** Se tutte le sezioni locali sono compatibili, il processo converge a rappresentazione globale coerente s\_globale che è l'incollamento di tutte le sezioni locali.

Evidenza per integrazione incrementale e dinamica temporale dell'incollamento:

**Paradigmi di presentazione seriale rapida (RSVP):** Esperimenti che presentano frasi parola per parola con timing controllato (per esempio, 300 ms per parola) e registrano attività neurale continua mostrano che integrazione avviene continuamente, non solo a fine frase. N400 emerge per ogni parola in base alla compatibilità con il contesto parzialmente costruito fino a quel punto. Questo è consistente con incollamento incrementale.

**Violazioni semantiche in posizioni diverse:** Se violazione semantica appare in posizione precoce vs. tardiva nella frase, la latenza e distribuzione topografica della N400 cambiano minimamente (la risposta neurale all'incompatibilità è relativamente costante), ma il contesto pre-violazione modulato dalla posizione influenza l'ampiezza. Questo mostra che il sistema mantiene rappresentazione parziale costruita incrementalmente e verifica compatibilità di ogni nuova parola con questa rappresentazione.

**Interazioni ricorrenti multi-regionali:** Studi di connettività effettiva che misurano come informazione fluisce tra regioni durante comprensione di frasi mostrano pattern temporali ricorrenti: informazione fluisce inizialmente in direzione bottom-up (da cortecce sensoriali a MTG), poi top-down (da prefrontale a MTG per modulazione contestuale), poi lateralmente (tra MTG e altre regioni semantiche per integrazione), con molteplici cicli di comunicazione in entrambe le direzioni. Questi cicli ricorrenti implementano il processo iterativo di verifica compatibilità e incollamento.

## 20.3 Patologie Linguistiche come Danneggiamenti della Struttura di Fascio

### 20.3.1 Framework Generale: Lesioni come Interruzioni Topologiche

La teoria dei fasci semantici, naturalizzata neuralmente, genera predizioni testabili sui deficit che dovrebbero emergere da lesioni cerebrali che danneggiano specifiche componenti della struttura di fascio. Lesioni diverse dovrebbero produrre pattern qualitativamente distinti di compromissione semantica, distinguibili non solo in termini di "gravità" (quanto è compromessa la semantica) ma di "tipo" (quale aspetto della struttura di fascio è danneggiato).

Identifichiamo principali tipi di danno alla struttura di fascio e le loro manifestazioni cliniche predette:

**Tipo A - Danneggiamento delle Sezioni Locali (Perdita di Contenuto Semantico):** Lesioni che distruggono popolazioni neuronali nel MTG/ITG che codificano rappresentazioni semantiche specifiche eliminano sezioni locali del fascio semantico. Il paziente perde conoscenza semantica per domini o categorie specifiche, ma la struttura topologica (aperti contestuali, mappe di restrizione) rimane intatta per domini preservati.

Manifestazione clinica: Demenza semantica, particolarmente nelle varianti con atrofia focale del lobo temporale anteriore. Pazienti mostrano perdita progressiva di conoscenza semantica per categorie specifiche (spesso oggetti viventi prima di artefatti, o viceversa), mentre abilità sintattiche, fonologiche, e capacità di utilizzare contesto per modulare significati residui rimangono relativamente preservate. Esempio: paziente non riconosce più cosa sia un "cane", ha perso la sezione locale  $s_{\text{cane}} \in F(U_{\text{animali}})$ , ma se gli si presenta "cane" in contesto fortemente disambiguante ("Il cane abbaia e scodinzola"), può utilizzare il contesto per inferire parzialmente il significato.

**Tipo B - Danneggiamento delle Mappe di Restrizione (Deficit di Controllo Semantico):**

Lesioni alla corteccia prefrontale inferiore (IFG) o fascicoli che connettono prefrontale a regioni temporali interrompono mappe di restrizione  $p_{\{U,V\}}$ , impedendo specializzazione contestuale. Il paziente ha conoscenza semantica preservata (sezioni locali intatte) ma non può utilizzarla in modo contestualmente appropriato.

Manifestazione clinica: Afasia con deficit di controllo semantico (semantic control deficit), tipicamente dopo lesioni prefrontali sinistre. Pazienti conoscono i significati delle parole (test di definizioni o matching parola-immagine fuori contesto sono normali), ma faticano drammaticamente in compiti che richiedono selezionare l'interpretazione contestualmente appropriata tra molteplici alternative. Esempio: paziente sa che "banco" può significare sia sportello bancario che mobile scolastico, ma quando legge "Il banco è vuoto" in un testo chiaramente ambientato in una scuola, non riesce a utilizzare il contesto per selezionare l'interpretazione appropriata, producendo risposte inconsistenti o perseverando su interpretazioni precedenti irrilevanti.

**Tipo C - Danneggiamento delle Operazioni di Incollamento (Deficit di Integrazione):**

Lesioni che interrompono connettività tra regioni semantiche (lesioni a fascicoli di sostanza bianca come fascicolo arcuato, fascicolo longitudinale superiore) o che danneggiano hub integrativi (giro angolare) compromettono operazioni di incollamento. Rappresentazioni locali possono essere costruite nelle singole regioni ma non possono essere integrate coerentemente.

Manifestazione clinica: Afasia di conduzione (nella sua componente semantica) o sindromi da disconnessione semantica. Pazienti comprendono parole isolate e frasi semplici ma faticano con materiale complesso che richiede integrazione di informazioni da molteplici fonti. Esempio: paziente legge una frase come "Giovanni, che Maria aveva incontrato al mercato dove vendevano frutta fresca, ha comprato mele", comprende ogni segmento localmente ("Giovanni", "Maria aveva incontrato", "al mercato", "vendevano frutta", "ha comprato mele") ma non riesce a integrare questi frammenti in rappresentazione semantica coerente globale. Non riesce a incollare le sezioni locali.

**Tipo D - Produzione di Ostruzioni Spurie (Errori di Incompatibilità):** Lesioni che creano rappresentazioni semantiche distorte o rumorose (per esempio, lesioni che non eliminano completamente rappresentazioni ma le rendono rumorose, imprecise) possono generare "false ostruzioni": rappresentazioni locali che dovrebbero essere compatibili appaiono incompatibili a causa del rumore neurale, impedendo incollamento anche quando dovrebbe essere possibile.

Manifestazione clinica: Parafasie semantiche (sostituzioni di parole con altre semanticamente correlate) e fenomeni di "tip-of-the-tongue" semantico. Paziente sa il significato che vuole esprimere ma attiva rappresentazioni lessicali imprecise che creano mismatch con il contesto. Esempio: vuole dire "cane" ma attiva anche "gatto" per rumore, verifica compatibilità con contesto ("Il \_ abbaia"), rileva incompatibilità per "gatto", ma per via del rumore non converge stabilmente a "cane", producendo esitazioni, autocorrezioni, sostituzioni.

### 20.3.2 Demenza Semantica: Atrofia Progressiva degli Spazi Semantici Locali

La demenza semantica (SD), variante della degenerazione frontotemporale, è caratterizzata da atrofia progressiva bilaterale ma tipicamente asimmetrica (predominanza sinistra) del lobo temporale anteriore, includendo porzioni anteriori di MTG, ITG, giro fusiforme, polo temporale. Questa atrofia risulta in perdita progressiva di conoscenza semantica mentre abilità sintattiche, fonologiche, memoria episodica per eventi recenti, funzioni esecutive, rimangono relativamente preservate nelle fasi precoci.

Dal punto di vista della teoria dei fasci, la demenza semantica corrisponde a **contrazione progressiva dello spazio base X** (lo spazio contestuale perde punti) e **eliminazione di sezioni locali** (il fascio semantico  $F_{\text{parola}}$  perde sezioni su interi aperti).

Specificamente, consideriamo il fascio  $F_{\text{cane}}$  per la parola "cane". Inizialmente (pre-malattia), questo fascio ha sezioni su molteplici aperti contestuali:

- $U_{\text{animali\_domestici}}: s_{\text{cane\_domestico}} \in F_{\text{cane}}(U_{\text{animali\_domestici}})$
- $U_{\text{animali\_selvatici}}: s_{\text{lupo}} \in F_{\text{cane}}$  (per estensioni come "cani selvatici")
- $U_{\text{metaforici}}: s_{\text{cane\_metaforico}} \in F_{\text{cane}}$  per usi metaforici ("una vita da cani")

Man mano che l'atrofia progredisce, neuroni nel lobo temporale anteriore che codificano rappresentazioni di "cane" degenerano. Dal punto di vista del fascio, aperti interi "collassano":

- Prima si perdono sezioni su aperti ristretti, specifici:  $U_{\text{metaforici}}$  si elimina (paziente non comprende più usi metaforici)
- Poi aperti intermedi:  $U_{\text{animali\_selvatici}}$  si riduce
- Infine anche aperti ampi collassano:  $U_{\text{animali\_domestici}}$  si restringe a regioni contestuali sempre più limitate

In fase avanzata, il paziente può aver perso completamente  $F_{\text{cane}}$ : la parola "cane" non ha più alcuna sezione non-nulla su nessun aperto contestuale, è diventata un significante vuoto.

Caratteristiche cliniche predette e osservate:

1. **Gradient di severità per categorie:** Categorie semantiche diverse sono rappresentate in regioni parzialmente sovrapposte ma parzialmente distinte nel lobo temporale (organizzazione categoriale graduata discussa precedentemente). Atrofia focale quindi colpisce categorie in modo selettivo inizialmente. Pazienti SD

tipicamente mostrano dissociazione viventi vs. artefatti, con un dominio più compromesso dell'altro (quale dipende dalla lateralizzazione dell'atrofia).

2. **Preservazione relativa della struttura topologica:** Anche quando sezioni specifiche sono perse, la capacità di utilizzare contesto (mappe di restrizione) rimane funzionale se la IFG è preservata. Pazienti SD infatti mostrano prestazioni migliori in compiti con forte supporto contestuale: anche se hanno perso conoscenza semantica per "cane", se vedono immagine di un cane che abbaia e gli si chiede "Cosa fa questo animale?", possono utilizzare informazione visiva contestuale per compensare parzialmente.
3. **Progressione da specifico a generale:** Teorie classiche predicono perdita dal particolare al generale, ma la teoria dei fasci predice pattern più complesso: la perdita segue la topologia della rappresentazione neurale, non necessariamente una gerarchia generale-specifico. Alcuni pazienti perdono conoscenza specifica ("chihuahua") prima di generale ("cane"), altri mostrano pattern opposto, dipendendo da quale regione del lobo temporale è più atrofizzata.

### 20.3.3 Afasia con Deficit di Controllo Semantico: Danneggiamento delle Mappe di Restrizione

Lesioni vascolari (ictus) che colpiscono la corteccia prefrontale inferiore sinistra, in particolare la pars triangularis e opercularis dell'IFG, producono pattern di deficit semantico qualitativamente diverso dalla demenza semantica, nonostante entrambe le sindromi coinvolgano "problemi semantici".

Il deficit cardinale è nell'applicazione contestualmente controllata della conoscenza semantica. Formalmente, nella teoria dei fasci, questo corrisponde a **danneggiamento delle mappe di restrizione  $p_{\{U,V\}}$** .

Paziente prototipico con deficit di controllo semantico:

- **Conoscenza semantica preservata fuori contesto:** In compiti decontestualizzati (matching parola-definizione, matching parola-immagine con singoli item), performance è normale o quasi normale. Il fascio F ha sezioni intatte su aperti ampi.
- **Deficit drammatico con controllo contestuale:** In compiti che richiedono utilizzare contesto per selezionare interpretazioni (leggere parole polisemiche in contesti disambiguanti, rispondere a domande su testi che richiedono integrazione contestuale, generare parole semanticamente appropriate in contesti vincolanti), performance crolla. Non riesce ad applicare  $p_{\{U_{\text{ampio}}, V_{\text{contesto\_specifico}}\}}$ .

Esempio paradigmatico (Jefferies & Lambon Ralph, 2006): Compito di riconoscimento di parole in contesto:

- Contesto debole: "Il dottore usava la \_\_\_\_" (molte parole compatibili: siringa, prescrizione, mascherina...)

- Contesto forte: "Il dottore usava lo stetoscopio per ascoltare il \_\_\_" (poche parole compatibili: cuore, respiro...)
- Target: "cuore"

Pazienti con deficit di controllo semantico:

- Riconoscono "cuore" normalmente in isolamento
- Facilitazione da contesto forte è ridotta o assente (dove controlli sani mostrano facilitazione massiva)
- Errori di selezione: possono dire "polmone" invece di "cuore" anche in contesto forte, perché non applicano efficacemente la restrizione contestuale

Dal punto di vista del fascio:

- L'aperto ampio  $U_{\text{organi\_interni}}$  contiene sezioni per cuore, polmone, fegato, ecc.
- Il contesto "ascoltare con stetoscopio" dovrebbe restringere a  $V_{\text{organi\_auscultabili}} \subset U_{\text{organi\_interni}}$
- La mappa  $p_{\{U_{\text{organi\_interni}}, V_{\text{organi\_auscultabili}}\}}$  è compromessa
- Il sistema non specializza efficacemente, rimane "bloccato" nell'aperto ampio con troppi competitori attivi

Caratteristiche aggiuntive predette e osservate:

1. **Dipendenza da richieste di controllo:** Performance degrada parametricamente con aumentare delle richieste di controllo (numero di competitori, forza di associazioni distraenti, complessità del contesto). Questo parallela la "distanza" nella topologia: restrizioni da  $U$  a  $V$  molto piccolo (grande distanza topologica) sono più compromesse che restrizioni a  $V$  ancora ampio.
2. **Beneficio da supporto esterno:** Fornire scaffolding esterno (per esempio, presentare visivamente le alternative e chiedere scelta forzata invece di produzione libera) migliora performance, perché riduce richieste di controllo interno per restrizione.
3. **Variabilità item-to-item:** Lo stesso item (stessa parola) può essere processato correttamente in un trial e incorrettamente in trial successivo, perché la compromissione è nel processo di controllo (restrizione), non nella rappresentazione stessa. Il fascio ha sezioni, ma l'accesso attraverso mappe di restrizione è instabile.

### 20.3.4 Sindromi da Disconnessione: Interruzione dei Processi di Incollamento

Lesioni che non danneggiano direttamente regioni corticali semantiche ma interrompono fascicoli di sostanza bianca che connettono queste regioni producono sindromi caratterizzate da **deficit di integrazione semantica**, corrispondenti a compromissione delle operazioni di incollamento nella teoria dei fasci.

Il caso clinico paradigmatico è l'**afasia di conduzione** nella sua componente semantica (tradizionalmente afasia di conduzione è definita per deficit di ripetizione verbale, ma molti pazienti hanno anche componenti semantiche).

Lesioni tipiche: Interruzione del fascicolo arcuato (connette regioni temporali posteriori a regioni frontali) o del fascicolo longitudinale superiore (connessioni temporo-parietali). Queste lesioni disconnettono componenti della rete semantica distribuita.

Deficit predetti dalla teoria dei fasci:

- **Sezioni locali preservate:** Ciascuna regione della rete semantica isolatamente può ancora costruire rappresentazioni parziali corrette. Paziente comprende parole singole, frammenti di frasi.
- **Incollamento compromesso:** Quando multiple sezioni locali da regioni diverse devono essere integrate (incollate) per formare rappresentazione globale coerente, il processo fallisce o è molto inefficiente.

Manifestazioni cliniche specifiche:

1. **Deficit nella comprensione di frasi sintatticamente complesse con embeddings multipli:** Frase come "Il ragazzo che la ragazza che porta occhiali ha baciato è biondo" richiede costruire rappresentazioni semantiche locali per ogni clausola e poi integrarle rispettando struttura sintattica. Paziente con disconnessione semantica: comprende "ragazzo", comprende "ragazza porta occhiali", comprende "ha baciato", comprende "è biondo", ma non riesce a incollare questi frammenti nella configurazione corretta. Non capisce chi è biondo.
2. **Deficit in compiti di verifica semantica che richiedono integrazione multi-attributo:** Domanda: "Un animale che vola e fa il miele esiste?" Richiede recuperare attributi di varie categorie (animali che volano: uccelli, pipistrelli, insetti; animali che fanno miele: api) e verificare se esiste intersezione. Paziente recupera separatamente "animali che volano" e "animali che fanno miele" ma non riesce a integrare (incollare) queste due rappresentazioni per verificare sovrapposizione.
3. **Prestazioni fluttuanti dipendenti da connettività funzionale residua:** A differenza di lesioni corticali dove perdita è stabile, lesioni di sostanza bianca lasciano connettività residua parziale (fibre non completamente distrutte). La capacità di incollamento fluttua con stato funzionale della rete: quando connettività residua è ottimale (paziente riposato, attento), incollamento può riuscire; quando connettività degrada (fatica, distrazione), incollamento fallisce.

Dalla prospettiva del fascio, lesioni di sostanza bianca corrispondono a:

- Interruzione di canali di comunicazione tra "regioni" dello spazio contestuale
- Le sezioni locali  $s_i \in F(U_i)$  rimangono definite
- Ma verifica di compatibilità  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$  è compromessa (non c'è comunicazione efficace tra  $U_i$  e  $U_j$ )

- Processo di incollamento quindi fallisce anche quando sezioni locali sarebbero compatibili

### 20.3.5 Predizioni Sperimentali e Test della Teoria

La teoria dei fasci naturalizzata neuralmente genera predizioni testabili specifiche che distinguono tra diversi tipi di patologia semantica in modi che teorie alternative potrebbero non predire:

**Predizione 1 - Doppia Dissociazione tra Contenuto e Controllo:** Demenza semantica (perdita di sezioni) vs. afasia con deficit di controllo semantico (danneggiamento di mappe di restrizione) dovrebbero mostrare dissociazione doppia in compiti appropriati:

- Compito A (richiede conoscenza ricca ma poco controllo): Decisione semantica semplice "È 'cane' un animale?" - SD compromessa, deficit controllo preservato
- Compito B (richiede controllo forte ma conoscenza basica): Selezione tra competitori semantici forti in contesto debole - SD relativamente preservata, deficit controllo compromesso

Questa doppia dissociazione è documentata (Jefferies & Lambon Ralph, 2006; Noonan et al., 2013).

**Predizione 2 - Pattern Temporali Distinti in MEG/EEG:** Deficit di controllo semantico (mappe di restrizione) dovrebbe manifestarsi in anomalie temporali nella finestra 200-400 ms (quando modulazione top-down normalmente restringe sezioni), mentre deficit di contenuto (perdita sezioni) dovrebbe manifestarsi prima (100-200 ms) quando rappresentazioni lessicali sono normalmente attivate.

Test: Registrazioni MEG in pazienti SD vs. pazienti con lesioni prefrontali mostrano effettivamente pattern temporali distinti (Hoffman et al., 2018).

**Predizione 3 - Effetti di Lesioni da Connettività Misurabili con DTI:** Deficit di incollamento dovrebbero correlare con integrità microstrutturale di fascicoli di sostanza bianca (misurata con anisotropia frazionale in DTI), indipendentemente da volume lesionale corticale.

Test: Studi che combinano DTI e test semantici in pazienti post-ictus mostrano che integrità del fascicolo arcuato e SLF predice performance in compiti di integrazione semantica anche controllando per dimensione lesionale corticale (Harvey et al., 2013).

**Predizione 4 - Manipolabilità con Supporto Contestuale:** Deficit di controllo (mappe restrizione) dovrebbe essere parzialmente compensabile fornendo supporto contestuale esterno molto forte (riduce richieste di controllo interno), mentre deficit di contenuto (perdita sezioni) non dovrebbe beneficiarne se le sezioni sono completamente perse.

Test: Pazienti con deficit controllo semantico mostrano beneficio da cueing contestuale forte (Jefferies et al., 2008), SD non beneficia se conoscenza è persa.

## Conclusione del Capitolo 20



Questo capitolo ha sviluppato sistematicamente una naturalizzazione neurale della teoria dei fasci semantici, mostrando come le strutture matematiche astratte possano corrispondere a architetture neurali implementabili e implementate. Lo spazio contestuale  $X$  è lo spazio degli stati neurali distribuiti, gli aperti sono bacini di attrazione, le mappe di restrizione sono modulazione top-down, l'incollamento è integrazione multi-regionale, le ostruzioni coomologiche sono codificate in segnali di errore come N400.

Patologie linguistiche forniscono test empirici: lesioni diverse interrompono componenti diverse della struttura di fascio, producendo pattern distintivi di deficit semantico. La convergenza tra predizioni teoriche e evidenze cliniche/sperimentali supporta la plausibilità neurale dell'approccio.

## Capitolo 21: Fenomeni Prosodici Complessi e Interfaccia Prosodia-Sintassi-Semantica

### Introduzione: La Dimensione Sovrasegmentale del Significato

Nel Capitolo 14 del documento principale abbiamo introdotto i fondamenti della modellazione prosodica attraverso fasci definiti su spazi di contorni intonazionali, analizzando come la prosodia moduli forza illocutiva, focus informativo, e stati affettivi. Tuttavia, quella trattazione, pur rigorosa, ha toccato solo la superficie di un dominio di fenomeni linguistici estremamente ricco, complesso, multi-stratificato, dove la prosodia non è semplicemente una "decorazione" opzionale sovrapposta a strutture sintattiche e semantiche già completamente determinate, ma costituisce piuttosto una componente fondamentale, integrale, indispensabile del sistema linguistico, che interagisce in modi profondi e sistematici con sintassi, semantica, pragmatica, determinando significati in modi che non possono essere catturati da rappresentazioni puramente segmentali.

La prosodia, nel senso più ampio e comprensivo del termine, comprende tutti gli aspetti soprasegmentali o sovrasegmentali della realizzazione fonetica del linguaggio, ovvero quegli aspetti che si estendono oltre i singoli segmenti fonemici (consonanti e vocali individuali) per caratterizzare unità linguistiche di livello superiore come sillabe, piedi metrici, parole fonologiche, sintagmi intonazionali, enunciati completi. Questi aspetti includono:

**Intonazione (pitch/ $F_0$ ):** La variazione della frequenza fondamentale della voce nel tempo, percepita come variazioni di altezza melodica, che crea i "contorni intonazionali" caratteristici di domande, affermazioni, esclamazioni, strutture di focus, marcatura di confini prosodici, e una miriade di altre funzioni linguistiche e paralinguistiche.

**Ritmo e timing:** I pattern temporali di durata relativa delle sillabe, alternanza di sillabe accentate e atone, raggruppamento temporale di unità ritmiche, pause e confini temporali, che creano la "metrica" caratteristica di ciascuna lingua e che svolgono funzioni cruciali nella segmentazione del flusso del parlato, nell'identificazione di confini sintattici, nella marcatura di prominenza.

**Accento e prominenzza:** La marcatura di sillabe, parole, o sintagmi come prosodicamente prominenti attraverso combinazioni di aumento di pitch, durata, intensità, qualità vocale, che segnala struttura informazionale (focus, topic, contrasto), struttura metrica (piedi, testa prosodica), struttura sintattica (testa sintattica di sintagma).

**Qualità vocale:** Modificazioni della fonazione (creaky voice, breathy voice, falsetto), tensione laringea, configurazione del tratto vocale, che modulano significato affettivo, attitudinale, sociale, stilistico.

Questo capitolo estende e approfondisce drammaticamente l'analisi prosodica, sviluppando modelli di fasci per fenomeni prosodici avanzati che non sono stati toccati nella trattazione preliminare: l'intonazione di lista (list intonation), la struttura ritmica e metrica, e soprattutto l'interfaccia complessa multi-direzionale tra prosodia, sintassi e semantica, dove vincoli e influenze fluiscono in entrambe le direzioni, creando una architettura integrata dove prosodia non è né puramente determinata da sintassi (concezione bottom-up) né completamente autonoma (concezione di sistemi paralleli indipendenti), ma emerge da interazione dinamica stretta, bidirezionale, tra livelli di rappresentazione.

## 21.1 Intonazione di Lista: Fasci su Spazi di Sequenze e Strutture di Coordinazione

### 21.1.1 Il Fenomeno dell'Intonazione di Lista: Descrizione e Proprietà Fondamentali

L'intonazione di lista (list intonation) è un pattern prosodico caratteristico che emerge quando un parlante enumera una serie di elementi, tipicamente in una struttura coordinata. In italiano, inglese, e molte altre lingue, quando si produce una lista di elementi "A, B, C, e D", ciascun elemento riceve un contorno intonazionale specifico che segnala la sua posizione nella lista e il fatto che la lista continua o si conclude.

Il pattern prototipico in italiano (simile all'inglese) è il seguente:

- **Elementi non-finali (A, B, C):** Contorno intonazionale con pitch finale ascendente moderato (rise), che segnala continuazione, indicazione che la lista non è completa.
- **Elemento finale (D):** Contorno intonazionale con pitch finale discendente (fall), che segnala completamento, indicazione che la lista è esaurita.

Esempio concreto (il simbolo ↗ indica contorno ascendente, ↘ discendente): "Ho comprato mele↗, pere↗, banane↗, e arance↘."

Questo pattern non è arbitrario ma svolge funzioni comunicative cruciali:

**Funzione di segmentazione:** I contorni intonazionali marcano confini tra gli elementi della lista, aiutando l'ascoltatore a parsificare il flusso del parlato in unità distinte anche in assenza di pause esplicite.

**Funzione di aspettazione:** Il contorno non-finale crea aspettativa che la lista continuerà, preparando l'ascoltatore a processare ulteriori elementi. Il contorno finale segnala completamento, comunicando che non bisogna aspettare elementi aggiuntivi.

**Funzione di strutturazione informativa:** La ripetizione del contorno non-finale su molteplici elementi (mele↗, pere↗, banane↗) crea parallelismo prosodico che riflette parallelismo strutturale nella coordinazione sintattica, rafforzando la percezione di una lista di elementi equipollenti.

Crucialmente, il pattern di intonazione di lista non dipende solo dal contenuto lessicale degli elementi (quali parole specifiche vengono enumerate) ma dalla **struttura della lista stessa**: il numero di elementi, la loro lunghezza fonologica, la presenza di modificatori, la complessità sintattica interna degli elementi.

### 21.1.2 Modellazione tramite Fasci: Spazio delle Liste e Topologia della Coordinazione

Per modellare formalmente l'intonazione di lista nella teoria dei fasci semantici, dobbiamo prima costruire uno spazio topologico appropriato che catturi la struttura delle liste linguistiche.

Definiamo lo spazio  $L$  delle liste possibili come:  $L = \{\text{liste} = (e_1, e_2, \dots, e_n) : n \geq 2, \text{ciascun } e_i \text{ è un elemento linguistico}\}$

dove ciascun elemento  $e_i$  può essere una parola, un sintagma nominale, una clausola, o un'altra unità sintattica, e  $n$  è la cardinalità della lista (numero di elementi).

La topologia su  $L$  è indotta da molteplici fattori strutturali:

**Cardinalità:** Liste con lo stesso numero di elementi sono topologicamente vicine. Definiamo per ogni  $n \in \mathbb{N}$  ( $n \geq 2$ ) un aperto:  $U_n = \{\text{liste} \in L : \text{cardinalità} = n\}$

Questi aperti formano una partizione di  $L$  (copertura disgiunta), catturando il fatto che il numero di elementi è un parametro discreto fondamentale.

**Lunghezza fonologica:** Liste i cui elementi hanno lunghezze fonologiche simili (numero di sillabe, durata temporale) sono topologicamente vicine. Questo cattura il fatto che la realizzazione prosodica deve adattarsi alla sostanza fonetica disponibile.

**Complessità sintattica:** Liste di elementi sintatticamente semplici (singole parole: "mele, pere, banane") vs. complessi (sintagmi modificati: "mele rosse mature, pere verdi succose, banane gialle tropicali") formano regioni topologicamente distinte, perché richiedono pattern prosodici diversi.

**Semantica della coordinazione:** Liste i cui elementi appartengono a categorie semantiche coerenti (tutti frutti, tutti animali, tutti colori) vs. eterogenee (mescolanza di categorie) hanno prossimità topologica diversa, modulando aspettative prosodiche.

Il fascio dell'intonazione di lista  $F\_intonazione\_lista$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq L$  l'insieme dei contorni intonazionali appropriati per liste in  $U$ :

$F\_intonazione\_lista(U) = \{\text{funzioni } I: U \rightarrow \text{Contorni} \text{ dove } I(\text{lista}) \text{ specifica il contorno intonazionale completo per quella lista}\}$

Un contorno intonazionale completo  $I(\text{lista})$  è una sequenza di contorni elementari, uno per ciascun elemento:  $I((e_1, e_2, \dots, e_n)) = (C_1, C_2, \dots, C_n)$

dove  $C_i$  è il contorno prosodico applicato all'elemento  $e_i$ .

### 21.1.3 Mappe di Restrizione e Pattern Ricorsivi

Le mappe di restrizione  $p_{\{U,V\}}: F\_intonazione\_lista(U) \rightarrow F\_intonazione\_lista(V)$  catturano come i pattern intonazionali si specializzano quando consideriamo sottofamiglie di liste.

Per esempio, consideriamo restrizione da liste di cardinalità arbitraria a liste di esattamente tre elementi:  $p_{\{L, U_3\}}: F\_intonazione\_lista(L) \rightarrow F\_intonazione\_lista(U_3)$

Questa mappa specializza il pattern generale a quello specifico per triple: Pattern generale:  $(C\_nonfinal, C\_nonfinal, \dots, C\_nonfinal, C\_final)$  Pattern per triple:  $(C\_nonfinal, C\_nonfinal, C\_final)$

La restrizione mantiene la struttura fondamentale (tutti gli elementi tranne l'ultimo ricevono contorno non-finale) ma fissa il numero di ripetizioni.

Un aspetto profondo e matematicamente interessante è che l'intonazione di lista esibisce **ricorsività prosodica**: liste possono essere annidate, e il pattern intonazionale si applica ricorsivamente a ogni livello di annidamento.

Esempio di lista annidata: "Ho comprato [frutta: mele↗, pere↘]↗, [verdura: carote↗, pomodori↘]↗, e [carne: pollo↗, manzo↘]↘."

La struttura è: lista esterna di tre elementi (frutta, verdura, carne), ciascuno dei quali è esso stesso una lista interna di due elementi.

Prosodicamente:

- Lista esterna: elementi non-finali "frutta" e "verdura" ricevono contorno non-finale (↗), elemento finale "carne" riceve contorno finale (↘)
- Liste interne: all'interno di ciascuna sotto-lista, l'ultimo elemento della sotto-lista riceve contorno finale per la sotto-lista

Questa ricorsività è catturabile nella teoria dei fasci definendo un fascio ricorsivo, dove il fascio  $F\_intonazione\_lista$  è definito non solo su liste piatte ma su **alberi di liste**, strutture ricorsive dove ciascun nodo può essere una lista i cui elementi possono essere a loro volta liste.

Formalmente, definiamo lo spazio  $L\_ricorsivo$  di liste ricorsive induttivamente:

- Caso base: Un elemento atomico  $e$  è in  $L_{\text{ricorsivo}}$
- Caso induttivo: Se  $l_1, l_2, \dots, l_n \in L_{\text{ricorsivo}}$ , allora la lista  $(l_1, l_2, \dots, l_n) \in L_{\text{ricorsivo}}$

Il fascio ricorsivo  $F_{\text{intonazione\_lista}}$  su  $L_{\text{ricorsivo}}$  assegna contorni seguendo regole composizionali ricorsive che rispettano la struttura ad albero.

#### 21.1.4 Violazioni e Riparazioni Prosodiche: Ostruzioni Coomologiche nell'Intonazione di Lista

Non tutte le liste possono ricevere contorni intonazionali perfettamente ben-formati. Esistono liste problematiche dove vincoli sintattici, semantici, o fonologici creano conflitti con i pattern prosodici canonici, generando ostruzioni che sono analizzabili coomologicamente.

**Caso 1 - Liste troppo lunghe (limiti di capacità prosodica):** Liste con cardinalità molto alta ( $n > 10$ ) sono prosodicamente problematiche perché la ripetizione del contorno non-finale molte volte diventa percettivamente monotona, faticosa per il parlante, difficile da mantenere distinta. I parlanti tendono a "resettare" il pattern prosodico, introducendo sub-raggruppamenti:

"Ho comprato mele, pere, banane, arance, fragole\... [pausa/reset] ...ciliegie, pesche\."

La lista viene segmentata in due sotto-liste prosodiche, ciascuna con proprio pattern completo (non-finale ... non-finale ... finale). Questo corrisponde a fallimento dell'incollamento: la sezione globale per l'intera lista non può essere costruita applicando il pattern canonico, quindi il sistema "sheafifica" costruendo approssimazione attraverso sub-liste.

Dal punto di vista coomologico, abbiamo:

- Aperto  $U_{\text{lunga}} =$  liste con  $n > 10$
- Sezioni locali su sotto-aperti  $U_{\text{sublist}_1} =$  primi 5 elementi,  $U_{\text{sublist}_2} =$  secondi 5 elementi
- Sezioni locali  $s_1 \in F(U_{\text{sublist}_1})$  e  $s_2 \in F(U_{\text{sublist}_2})$  sono internamente coerenti
- Ma  $s_1|_{\{U_{\text{sublist}_1} \cap U_{\text{sublist}_2}\}}$  (alla giuntura tra sub-liste) presenta incompatibilità: entrambe le sotto-liste vogliono terminare con contorno finale, ma alla giuntura c'è continuazione
- L'ostruzione  $\delta^0(s) \neq 0$  genera necessità di riparazione prosodica (pause, reset)

**Caso 2 - Liste semanticamente eterogenee (conflitto coerenza semantica - struttura prosodica):** Liste i cui elementi appartengono a categorie semantiche radicalmente diverse possono resistere la struttura prosodica uniforme che presuppone equipollenza:

"Ho comprato mele, e inoltre ieri ho visto un film interessante ma non ho finito i compiti"

Questa non è vera lista coordinata ma mescolanza di contenuti semantici disparati. L'intonazione di lista standard è inappropriata; richiederebbe contorni prosodici differenziati che riflettono la struttura semantica eterogenea. Il conflitto tra struttura sintattica superficiale (coordinazione) e struttura semantica profonda (non-lista) genera ostruzione.

### 21.1.5 Evidenze Sperimentali e Cross-Linguistiche

Pattern di intonazione di lista sono universalmente attestati nelle lingue del mondo, ma con realizzazioni fonetiche diverse che riflettono i sistemi tonali/intonazionali specifici di ciascuna lingua.

**Lingue europee (italiano, inglese, francese, spagnolo):** Pattern rise-on-non-final, fall-on-final descritto sopra.

**Lingue tonali (mandarino, cantonese):** L'intonazione di lista si sovrappone al sistema tonale lessicale. Invece di pitch assoluto, utilizza **boundary tones** (toni di confine) che si aggiungono ai toni lessicali, creando contorni complessi. Studi strumentali (Wong & Diehl, 2003) mostrano che il pattern logico (marcatura di non-finale vs. finale) è preservato ma realizzato attraverso modulazione di registro tonale piuttosto che pitch assoluto.

**Giapponese (lingua pitch-accent):** Utilizza variazioni di **downstep** (abbassamento progressivo di registro) e **reset** alla fine della lista per marcare struttura (Venditti, 2005).

Evidenza sperimentale da studi di produzione controllata:

- Parlanti producono pattern di lista spontaneamente e consistentemente anche senza training esplicito
- Lunghezza della lista modula realizzazione: liste più lunghe mostrano maggiore variabilità nella ripetizione del contorno non-finale, con possibile degradazione del pattern
- Complessità sintattica degli elementi modula prominenza prosodica: elementi sintatticamente complessi ricevono contorni più elaborati

Evidenza percettiva:

- Ascoltatori utilizzano pattern intonazionale per segmentare liste, anche in assenza di pause o congiunzioni esplicite
- Violazioni intenzionali del pattern (mettere contorno finale su elemento non-finale) causano dispercezioni: ascoltatori interpretano l'elemento come finale anche quando semanticamente dovrebbe continuare

## 21.2 Ritmo e Struttura Metrica: Fasci su Grafi di Griglia Metrica

### 21.2.1 Teoria Metrica in Fonologia: Dai Piedi ai Sintagmi Fonologici

La fonologia metrica, sviluppata estensivamente da Liberman, Prince, Hayes e altri, modella l'organizzazione ritmica del linguaggio parlato attraverso strutture gerarchiche di prominenza relativa. L'idea centrale è che le sillabe non sono sequenze piatte, equipollenti, ma organizzate in costituenti prosodici gerarchici dove alcune sillabe sono più prominenti (accentate, forti) di altre (atone, deboli).

La gerarchia metrica standard include livelli:

- **Sillaba:** Unità minima
- **Piede metrico:** Raggruppamento binario (o ternario) di sillabe dove una è testa (prominente) e altre sono dipendenti. Tipi principali: trocaico (forte-debole: SW), giambico (debole-forte: WS)
- **Parola fonologica:** Sequenza di piedi con un piede designato come testa
- **Sintagma fonologico:** Raggruppamento di parole fonologiche
- **Sintagma intonazionale:** Livello più alto, corrisponde tipicamente a clausola o frase

Questa gerarchia non è puramente fonologica ma interfaccia essenzialmente con sintassi (confini sintattici tendono ad allinearsi con confini prosodici) e semantica (focus e prominenza informativa influenzano prominenza metrica).

### 21.2.2 Spazio delle Strutture Metriche come Grafo Orientato

Per modellare la struttura metrica nella teoria dei fasci, definiamo uno spazio M di possibili assegnazioni metriche a un enunciato. Una struttura metrica per un enunciato di n sillabe è un grafo orientato aciclico (DAG) dove:

- Nodi sono sillabe individuali e costituenti prosodici (piedi, parole fonologiche, sintagmi)
- Archi orientati rappresentano relazioni di prominenza: arco da nodo A a nodo B significa "A è testa di B" o "A è più prominente di B nel costituente che li domina"

Formalmente:  $M = \{\text{grafi metrici } G = (V, E) \text{ che rispettano vincoli della fonologia metrica}\}$

I vincoli includono:

- **Binarismo (o ternarietà limitata):** Ogni costituente ha al massimo 2 (o 3) figli immediati
- **Aciclicità:** Nessun ciclo di prominenza (non può essere  $A > B > C > A$ )
- **Completezza:** Ogni sillaba è dominata da una catena di costituenti fino al livello più alto
- **Testa unica:** Ogni costituente (eccetto sillabe terminali) ha esattamente una testa

La topologia su M è indotta da relazioni di similarità strutturale: due strutture metriche sono vicine se differiscono minimalmente nell'assegnazione di prominenze. Per esempio, strutture che differiscono solo nella posizione di una singola prominenza sono vicine, mentre strutture con configurazioni radicalmente diverse sono lontane.

Aperti rilevanti in M:

- **U\_trocaico:** Strutture metriche dove dominano piedi trocaici (SW)
- **U\_giambico:** Strutture con dominanza di piedi giambici (WS)
- **U\_iniziale:** Strutture dove accento primario cade su posizione iniziale della parola
- **U\_finale:** Strutture con accento primario finale

### 21.2.3 Fascio della Realizzazione Ritmica

Il fascio  $F_{\text{ritmo}}$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq M$  le possibili realizzazioni ritmiche fonologiche compatibili con le strutture metriche in  $U$ :

$F_{\text{ritmo}}(U) = \{\text{funzioni } R: U \rightarrow \text{Pattern\_temporali} \text{ dove } R(G) \text{ specifica durate relative di sillabe, pause, velocità di articolazione che implementano la struttura metrica } G\}$

Una realizzazione ritmica  $R(G)$  è una funzione che assegna a ciascuna sillaba in  $G$ :

- Durata temporale assoluta (millisecondi)
- Velocità di articolazione locale (sillabe per secondo)
- Presenza/assenza di pause ai confini di costituenti

La realizzazione rispetta vincoli che correlano prominenza metrica e realizzazione temporale:

- **Sillabe più prominenti sono più lunghe:** Se sillaba  $\sigma_1$  è più prominente di  $\sigma_2$  in  $G$ , allora  $\text{durata}(\sigma_1) > \text{durata}(\sigma_2)$
- **Piedi sono isocroni:** Piedi metrici tendono ad avere durate totali simili (isocronismo), compensando durate delle sillabe interne

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{ritmo}}(U) \rightarrow F_{\text{ritmo}}(V)$  specializzano realizzazioni ritmiche. Per esempio, restrizione da strutture metriche generali a strutture con pattern specifico:  $\rho_{\{M, U_{\text{trocaico}}\}}$ : Specializza a realizzazioni dove alternanza forte-debole è implementata con pattern durata lunga-breve

#### 21.2.4 Interfaccia Metrica-Semantica: Focus e Riassegnazione di Prominenza

La struttura metrica non è determinata solo da fattori fonologici ma è modulata profondamente da fattori semantici e pragmatici, particolarmente dalla struttura informativa (focus, topic, contrasto).

Il fenomeno centrale è che **l'accento nucleare** (la prominenza massima nel sintagma intonazionale) cade tipicamente sull'elemento che porta focus informativo, e questa assegnazione può violare pattern metrici default se richiesto dalla struttura informativa.

Esempio in inglese (pattern simile in italiano): Default (senza focus marcato): "John gave a BOOK to Mary" (accento finale, default) Focus su "book": "John gave a BOOK to Mary" (accento su "book", deviazione dal default) Focus su "John": "JOHN gave a book to Mary" (accento iniziale, forte deviazione)

Dal punto di vista dei fasci, questo richiede morfismo tra fascio della struttura informativa  $F_{\text{focus}}$  e fascio della struttura metrica  $F_{\text{metrica}}$ :

$\phi_{\text{focus\_metrica}}: F_{\text{focus}} \rightarrow F_{\text{metrica}}$

Questo morfismo prende strutture di focus e produce (o modifica) strutture metriche per implementare il focus prosodicamente.



Per ogni contesto comunicativo  $c$ , se la struttura di focus specifica che elemento  $E$  è focus, allora  $\phi$  riassegna prominenze metriche in modo che  $E$  riceva la prominenza massima:  $\phi(\text{focus\_su\_}E)(G) = G'$  dove in  $G'$  il nodo corrispondente a  $E$  è testa del sintagma intonazionale

Questo morfismo non è sempre ben definito (può generare ostruzioni): se la struttura sintattica è tale che assegnare prominenza a  $E$  richiede violare vincoli metrici fondamentali (per esempio, richiederebbe che un elemento funzionale atono diventi prominente), allora  $\phi$  non può operare senza creare incoerenze. L'ostruzione può essere risolta attraverso strategie di riparazione (inserimento di pausa, ristrutturazione sintagma, cambiamento intonazione).

## 21.3 Interfaccia Prosodia-Sintassi: Bidirezionalità e Vincoli Reciproci

### 21.3.1 Modelli dell'Interfaccia: Da Sintassi-a-Prosodia a Interazione Bidirezionale

Storicamente, la relazione tra sintassi e prosodia è stata concepita in termini unidirezionali: la struttura sintattica determina la struttura prosodica attraverso regole di "mappatura sintassi-fonologia". Secondo questo modello, chiamiamolo modello derivazionale unidirezionale:

1. La sintassi genera strutture sintattiche (alberi sintattici)
2. Regole di mappatura convertono confini sintattici in confini prosodici
3. La fonologia assegna contorni intonazionali e pattern ritmici basandosi sulla struttura prosodica derivata

Questa concezione, codificata nella teoria della fonologia prosodica (Selkirk, Nespor & Vogel), ha prodotto generalizzazioni importanti (per esempio, l'ipotesi della Strict Layer Hypothesis che vincola gerarchia prosodica), ma incontra problemi empirici e concettuali:

**Problema 1 - Non-isomorfismo:** Struttura sintattica e struttura prosodica non sono isomorfe. Confini sintattici non corrispondono sempre a confini prosodici di forza proporzionale. Un confine sintattico maggiore (tra clausole) può avere marcatura prosodica debole se le clausole sono semanticamente strettamente connesse, mentre un confine sintattico minore (all'interno di sintagma) può avere marcatura prosodica forte se c'è inserimento parentetico o focus contrastivo.

**Problema 2 - Influenza inversa:** Vincoli prosodici possono influenzare scelte sintattiche. Fenomeni di heavy NP shift, extraposizione, dislocazione, sono parzialmente motivati da considerazioni prosodiche: strutture sintattiche alternative sono scelte per evitare strutture prosodiche mal-formate (troppo sbilanciate, con frasi fonologiche troppo lunghe).

**Problema 3 - Ambiguità sintattiche disambiguate prosodicamente:** In casi di ambiguità sintattica strutturale, la prosodia può disambiguare, indicando che porta informazione strutturale indipendente: "Vecchi uomini e donne" - può essere [vecchi [uomini e donne]] o

[[vecchi uomini] e donne] Prosodicamente: pausa dopo "uomini" indica seconda struttura, nessuna pausa indica prima struttura

Questi problemi motivano modello bidirezionale interattivo dove sintassi e prosodia si vincolano mutuamente attraverso interfaccia complessa.

### 21.3.2 Modellazione tramite Fasci: Spazio Congiunto Sintassi-Prosodia

Proponiamo modellare l'interfaccia sintassi-prosodia definendo fascio congiunto su spazio prodotto:  $X_{\text{synt-pros}} = X_{\text{sint}} \times X_{\text{pros}}$

dove  $X_{\text{sint}}$  è spazio di strutture sintattiche,  $X_{\text{pros}}$  è spazio di strutture prosodiche.

Un punto  $(s, p)$  in questo spazio rappresenta accoppiamento di struttura sintattica  $s$  con struttura prosodica  $p$ . Non tutti gli accoppiamenti sono ben-formati: esistono vincoli di compatibilità.

Definiamo relazione di compatibilità  $C \subseteq X_{\text{sint}} \times X_{\text{pros}}$ :  $(s, p) \in C$  sse  $s$  e  $p$  sono mutuamente compatibili (rispettano vincoli dell'interfaccia)

I vincoli includono:

- **Align constraints:** Confini di costituenti sintattici maggiori devono allinearsi con confini prosodici
- **Wrap constraints:** Costituenti sintattici coesi (teste con loro complementi) devono essere contenuti in stesso costituente prosodico
- **Balance constraints:** Strutture sintattiche sbilanciate (un ramo molto più lungo dell'altro) devono ricevere marcatura prosodica che bilancia
- **Focus constraints:** Elementi con focus informativo devono ricevere prominenza prosodica

La relazione  $C$  definisce un sottospazio  $W \subseteq X_{\text{sint}} \times X_{\text{pros}}$  di accoppiamenti ben-formati. La topologia su  $W$  è topologia di sottospazio indotta dalla topologia prodotto.

Il fascio  $F_{\text{interfaccia}}$  su  $W$  assegna:  $F_{\text{interfaccia}}(U) = \{\text{accoppiamenti sintassi-prosodia in } U \text{ che soddisfano vincoli di buona formazione con grado specificato}\}$

### 21.3.3 Ostruzioni e Trade-offs nell'Interfaccia

Crucialmente, non sempre è possibile trovare accoppiamento sintassi-prosodia che soddisfa perfettamente tutti i vincoli simultaneamente. Vincoli possono confliggere, generando ostruzioni coomologiche.

Esempio paradigmatico: strutture sintattiche con embedding multiplo: "Il libro che il ragazzo che conosci ha comprato è interessante"

Sintatticamente: [Il libro [che [il ragazzo [che conosci]] ha comprato]] è interessante] Multipli livelli di embedding con clausole relative annidate.

Prosodicamente, questa struttura è problematica:

- Wrap constraint vorrebbe che "il libro ... è interessante" (predicazione principale) sia in sintagma intonazionale singolo
- Ma lunghezza dell'argomento soggetto (con relative annidate) eccede capacità prosodica tipica di un sintagma intonazionale
- Soluzione richiede trade-off: inserire confine intonazionale interno (pausa) che viola wrap ma rispetta vincoli di lunghezza

Dal punto di vista coomologico:

- Aperto  $U\_embedding\_mult$  = strutture con embedding profondo
- Sezioni locali:  $s\_sint$  (struttura sintattica) e  $s\_pros$  (struttura prosodica tentativa)
- Verifica compatibilità:  $s\_sint$  e  $s\_pros$  violano vincoli se accoppiati direttamente
- Ostruzione  $\delta^0(s) \neq 0$
- Risoluzione richiede riparazione: sheafification produce accoppiamento approssimativo che minimizza violazioni

La teoria di Optimality Theory applicata all'interfaccia sintassi-prosodia (Truckenbrodt, 2007) formalizza questi trade-offs attraverso ranking di vincoli: vincoli in conflitto sono ordinati per priorità, violazioni di vincoli a bassa priorità sono tollerate per soddisfare vincoli ad alta priorità. Questo è precisamente il tipo di ottimizzazione che sheafification implementa: trovare miglior approssimazione quando incollamento perfetto è impossibile.

## 21.4 Conclusioni e Prospettive per la Prosodia nei Fasci Semantici

La prosodia, lungi dall'essere un aspetto marginale o decorativo del linguaggio, costituisce una dimensione fondamentale che interagisce profondamente con tutti i livelli della struttura linguistica. L'intonazione di lista rivela pattern ricorsivi complessi modellabili attraverso fasci su spazi di coordinate; il ritmo e la struttura metrica implementano gerarchie di prominenza che interfacciano con focus semantico; l'interfaccia sintassi-prosodia esibisce bidirezionalità e vincoli reciproci che generano ostruzioni coomologiche richiedenti risoluzione attraverso trade-offs.

La teoria dei fasci fornisce framework unificato per catturare queste complessità, modellando strutture prosodiche come sezioni di fasci, vincoli di buona formazione come condizioni di compatibilità sulle sovrapposizioni, conflitti e trade-offs come ostruzioni coomologiche, strategie di riparazione come sheafification.

Estensioni future potrebbero esplorare: interfaccia prosodia-pragmatica (marking di atti linguistici indiretti attraverso prosodia specifica), prosodia emotiva e affettiva (correlati neurali di pattern intonazionali emozionali), variazione sociolinguistica prosodica (dialetti prosodici), acquisizione della prosodia (come bambini costruiscono progressivamente fasci prosodici corretti).

## Capitolo 22: Semantica Compositazionale Avanzata e Teoria dei Fasci

### Introduzione: Oltre Montague - Compositionalità Contestuale e Topologica

La semantica formale contemporanea, nella tradizione inaugurata da Richard Montague e sviluppata attraverso generazioni di semanticisti, si fonda su un principio metodologico centrale e irrinunciabile: il **Principio di Compositionalità**, formulato classicamente come "Il significato di un'espressione complessa è funzione sistematica dei significati delle sue parti e del modo in cui sono combinate sintatticamente". Questo principio, pur potente e

empiricamente fruttuoso, incontra sfide profonde quando confrontato con la dipendenza contestuale pervasiva del significato che abbiamo analizzato estensivamente nei capitoli precedenti.

Il problema è il seguente: se il significato di ciascuna parte dipende dal contesto (come abbiamo mostrato), e il contesto stesso può variare attraverso la composizione (l'assemblaggio sintattico di parti in un tutto modifica il contesto rilevante), allora come può la composizione essere "sistematica" e "funzionale" nel senso richiesto dalla compositionalità classica? La teoria dei fasci offre soluzione: compositionalità non opera su significati atomici fissi ma su **sezioni di fasci**, e la composizione è implementata attraverso **morfismi tra fasci** che rispettano struttura topologica contestuale.

Questo capitolo sviluppa sistematicamente una semantica compositazionale avanzata basata su fasci, affrontando fenomeni complessi che hanno sfidato approcci standard: quantificazione generalizzata dove i quantificatori non operano su domini fissi ma contestualmente modulati; plurali e sommazione dove la formazione di gruppi dipende criticamente da contesto; comparativi e superlativi che richiedono classi di comparazione contestualmente determinate; intensionalità e distinzione de re/de dicto che emerge naturalmente da diversi livelli di restrizione contestuale.

### 22.1 Quantificazione Generalizzata e Teoria dei Fasci: Domini Variabili e Restrizioni Contestuali

#### 22.1.1 Quantificatori Generalizzati: Richiamo della Teoria Standard

La teoria dei quantificatori generalizzati (Barwise & Cooper, 1981; Keenan & Stavi, 1986) tratta i determinanti nominali ("ogni", "alcuni", "nessuno", "la maggior parte", "molti", "pochi", "almeno tre", "esattamente cinque") come operatori logici che denotano relazioni tra insiemi di individui. Un quantificatore generalizzato  $Q$  è funzione:

$$Q: P(D) \times P(D) \rightarrow \{0, 1\}$$

dove  $D$  è dominio di individui,  $P(D)$  è insieme potenza,  $Q(A, B) = 1$  significa che il quantificatore è soddisfatto quando il predicato restrittivo denota  $A$  e il predicato nucleare denota  $B$ .

Esempi:

- "Ogni":  $Q_{\text{ogni}}(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \subseteq B$
- "Alcuni":  $Q_{\text{alcuni}}(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$
- "Nessuno":  $Q_{\text{nessuno}}(A, B) = 1 \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$
- "La maggior parte":  $Q_{\text{maggioranza}}(A, B) = 1 \Leftrightarrow |A \cap B| > |A \setminus B|$
- "Almeno  $n$ ":  $Q_{\geq n}(A, B) = 1 \Leftrightarrow |A \cap B| \geq n$

Questa teoria cattura elegantemente pattern logici, proprietà universali dei quantificatori (conservatività, monotonia), ma ha limitazione cruciale: tratta il dominio  $D$  come fisso, universale, decontestualizzato. Empiricamente falso: il dominio di quantificazione è sempre contestualmente ristretto.

### 22.1.2 Fasci di Quantificatori con Domini Variabili

Estendiamo la teoria dei quantificatori generalizzati incorporando dipendenza contestuale del dominio attraverso fasci.

Definiamo spazio  $X_{\text{dom}}$  di domini di quantificazione possibili. Ogni punto  $D \in X_{\text{dom}}$  è un insieme di individui che potrebbe fungere da dominio. La topologia su  $X_{\text{dom}}$  riflette relazioni di inclusione:  $D_1$  e  $D_2$  sono vicini se uno è (quasi) sottoinsieme dell'altro.

Aperti rilevanti:

- $U_{\text{ampio}}$ : domini molto inclusivi (tutti gli oggetti, tutti gli animali)
- $U_{\text{ristretto}}$ : domini specifici (gli studenti in questa aula, i libri sulla scrivania)
- $U_{\text{categoria}_\alpha}$ : domini limitati a categoria semantica  $\alpha$

Il fascio del quantificatore  $F_Q$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq X_{\text{dom}}$  operatori quantificazionali:

$$F_Q(U) = \{\text{funzioni } Q_U \text{ dove per ogni } D \in U, Q_U(D) \text{ è relazione su } P(D) \times P(D)\}$$

Crucialmente, lo stesso quantificatore lessicale "ogni" può avere comportamenti diversi su domini diversi. Per domini finiti piccoli, "ogni" è facilmente verificabile; per domini infiniti, "ogni" è idealizzazione che richiede interpretazione generalizzata o quantificazione limitata a sotto-domini finiti accessibili.

Mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_Q(U) \rightarrow F_Q(V)$  per  $V \subseteq U$  specializzano quantificatori restringendo domini ammissibili.

**Esempio - "Ogni studente ha consegnato l'elaborato":**

- Contesto  $c_1$  generale universitario: dominio  $D_1$  = tutti gli studenti dell'università ( $n \approx 30.000$ )
- Contesto  $c_2$  corso specifico: dominio  $D_2$  = studenti del corso di Semantica ( $n \approx 50$ )

- Contesto  $c_3$  gruppo di lavoro: dominio  $D_3$  = studenti del gruppo 3 ( $n \approx 5$ )

Il fascio  $F_{\text{ogni}}$  ha sezioni:

- $s_1 \in F_{\text{ogni}}(U_1)$  dove  $U_1$  contiene domini ampi come  $D_1$
- $s_2 = \rho_{\{U_1, U_2\}}(s_1) \in F_{\text{ogni}}(U_2)$  dove  $U_2$  contiene domini intermedi come  $D_2$
- $s_3 = \rho_{\{U_2, U_3\}}(s_2) \in F_{\text{ogni}}(U_3)$  dove  $U_3$  contiene domini ristretti come  $D_3$

La restrizione specializza il quantificatore mantenendo la sua logica fondamentale (universalità) ma cambiando il dominio su cui opera.

### 22.1.3 Quantificatori Proporzionali e Soglie Contestuali

Quantificatori proporzionali come "la maggior parte", "molti", "pochi" sono particolarmente interessanti perché il loro soddisfacimento dipende non solo da cardinalità assolute ma da proporzioni, e le soglie proporzionali rilevanti sono contestualmente determinate.

"La maggior parte degli studenti ha passato" - quale proporzione conta come "maggior parte"?

- In contesto matematico formale: rigorosamente  $> 50\%$
- In contesto informale: potrebbe essere  $\geq 60\%$ ,  $\geq 70\%$ , dipende da aspettative

Modelliamo questo definendo fascio  $F_{\text{maggioranza}}$  dove le sezioni includono non solo il quantificatore ma anche funzione di soglia  $\theta: X \rightarrow (0, 1]$ :

$F_{\text{maggioranza}}(U) = \{(Q_{\text{magg}}, \theta) \text{ dove } Q_{\text{magg}} \text{ è quantificatore proporzionale e } \theta(c) \text{ è soglia per contesto } c \in U\}$

Per ogni contesto  $c$ ,  $Q_{\text{magg}}(A, B; \theta(c)) = 1 \Leftrightarrow |A \cap B| / |A| > \theta(c)$

Le mappe di restrizione modulano sia il dominio che la soglia. Restrungendo da contesti informali a contesti matematici formali:  $\rho_{\{U_{\text{informale}}, U_{\text{formale}}\}}((Q_{\text{magg}}, \theta_{\text{inf}})) = (Q_{\text{magg}}, \theta_{\text{form}})$  dove  $\theta_{\text{form}}(c) = 0,5$  per tutti  $c \in U_{\text{formale}}$  (soglia fissa rigorosa) mentre  $\theta_{\text{inf}}$  variava contestualmente

### 22.1.4 Scope Ambiguities e Ordini di Restrizione

Ambiguità di scope tra quantificatori e operatori modali, discussa nel Capitolo 9, riceve trattamento sistematico attraverso fasci.

Frase: "Ogni studente deve leggere un libro"

Due letture:

1.  $\forall > \square > \exists$ : Per ogni studente  $x$ , è obbligatorio che esista libro  $y$  tale che  $x$  legga  $y$
2.  $\square > \forall > \exists$ : È obbligatorio che per ogni studente  $x$  esista libro  $y$  tale che  $x$  legga  $y$

Queste letture corrispondono a diversi ordini di applicazione delle mappe di restrizione tra fasci  $F_{\text{ogni}}$ ,  $F_{\text{deve}}$ ,  $F_{\text{un}}$ .

Lettura 1: Prima restringiamo rispetto al quantificatore universale (iteriamo su studenti), poi applichiamo modalità, poi quantificatore esistenziale.

Formalmente, componiamo morfismi:  $[[\text{ogni studente}]](\lambda x. [[\text{deve}]](\lambda w. [[\text{un libro}]](\lambda y. [[x \text{ legge } y]])))$

Lettura 2: Prima applichiamo modalità (restringiamo a mondi deontici accessibili), poi quantificatore universale, poi esistenziale.

$[[\text{deve}]](\lambda w. [[\text{ogni studente}]](\lambda x. [[\text{un libro}]](\lambda y. [[x \text{ legge } y]])))$

Ogni ordine di composizione produce fascio risultante con struttura topologica diversa, corrispondente all'interpretazione semantica diversa.

La teoria predice che ordini di scope sono vincolati topologicamente: alcuni ordini generano fasci ben-formati (soddisfano condizioni di compatibilità), altri generano ostruzioni (violano vincoli), richiedendo riparazione o risultando agrammaticali/pragmaticamente infelici.

## 22.2 Plurali e Sommazione: Strutture di Gruppi e Operatori di Join

### 22.2.1 Il Problema dei Plurali: Dai Singolari a Gruppi

I sintagmi nominali plurali ("tre bambini", "alcuni cani", "le mele") denotano entità plurali - non singoli individui ma **gruppi** o **somme** di individui. La semantica dei plurali richiede estendere il dominio ontologico dai singoli individui atomici a entità complesse strutturate.

L'approccio standard (Link, 1983; Landman, 1989) estende il dominio  $D$  di individui atomici a dominio  $D^*$  che include somme mediante operazione di join  $\oplus$ :

- Se  $a, b \in D$  sono individui atomici,  $a \oplus b \in D^*$  è loro somma
- $\oplus$  è operazione associativa, commutativa, idempotente, formando semireticolo

Esempi:

- "tre bambini" denota somma  $b_1 \oplus b_2 \oplus b_3$
- "le mele" denota somma  $m_1 \oplus m_2 \oplus \dots \oplus m_n$  di tutte le mele salienti

Proprietà di predicati su plurali:

- **Distributivi**: "I bambini dormono" - distribuisce su atomi: ciascun bambino dorme
- **Collettivi**: "I bambini si riuniscono" - proprietà del gruppo, non degli atomi individuali
- **Cumulativi**: "Tre ragazzi portarono cinque valigie" - somma di ragazzi in relazione con somma di valigie

### 22.2.2 Fasci di Plurali con Formazione Contestuale di Gruppi

La formazione di gruppi (quali individui vengono sommati insieme) è contestualmente dipendente. Non tutti gli insiemi arbitrari di individui formano gruppi naturali; la salientia contestuale determina quali raggruppamenti sono ammissibili.

Definiamo spazio  $G$  di possibili gruppi. Un gruppo  $g \in G$  è somma di individui  $g = a_1 \oplus a_2 \oplus \dots \oplus a_n$  dove gli  $a_i$  formano insieme contestualmente coerente.

La topologia su  $G$  riflette vicinanza tra gruppi basata su:

- Sovrapposizione di membership: gruppi con molti membri in comune sono vicini
- Coerenza categoriale: gruppi i cui membri appartengono a stessa categoria semantica sono vicini
- Configurazione spaziale: gruppi i cui membri sono spazialmente prossimi sono vicini

Aperti in  $G$ :

- $U_{\text{categoria}_\alpha}$ : gruppi di elementi tutti nella categoria  $\alpha$  (gruppo di frutti, gruppo di animali)
- $U_{\text{prossimità\_spaziale}}$ : gruppi i cui membri sono spazialmente vicini
- $U_{\text{coerenza\_funzionale}}$ : gruppi definiti da funzione condivisa

Il fascio  $F_{\text{plurale}}$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq G$  interpretazioni semantiche di espressioni plurali:

$F_{\text{plurale}}(U) = \{\text{funzioni che assegnano a ogni gruppo } g \in U \text{ proprietà e relazioni applicabili a } g\}$

Mappe di restrizione specializzano interpretazioni plurali. Restrignendo da gruppi arbitrari a gruppi con proprietà specifica (per esempio, gruppi di oggetti fisicamente vicini), le interpretazioni si rafforzano: predicati collettivi diventano più salienti, distribuzioni di proprietà cambiano.

**Esempio - "I libri sono pesanti":**

- Interpretazione distributiva: ogni libro individuale è pesante
- Interpretazione collettiva: il gruppo dei libri (insieme, in somma) è pesante

Quale interpretazione è saliente dipende da contesto. Se i libri sono sparsi in luoghi diversi (gruppo non coeso spazialmente), interpretazione distributiva preferita. Se i libri sono impilati insieme (gruppo fisicamente coeso), interpretazione collettiva diventa disponibile ("i libri [impilati] sono pesanti [troppo da sollevare]").

Il fascio modella questo: su aperti  $U_{\text{coeso\_spazialmente}}$ , le sezioni includono interpretazioni collettive; su aperti  $U_{\text{disperso}}$ , le sezioni sono primariamente distributive.

### 22.2.3 Quantificazione su Plurali e Branching Quantification

Strutture con quantificazione multipla su plurali presentano complessità logiche profonde, particolarmente "branching quantification" dove quantificatori operano indipendentemente piuttosto che in scope annidato.



Frase: "Tre professori raccomandarono cinque studenti"

Letture:

1. Linear scope ( $\exists > \exists$ ): Esistono tre professori tali che ciascuno raccomandò cinque studenti (15 studenti totali)
2. Branching: Esistono tre professori e cinque studenti tali che ciascun professore raccomandò ciascun studente (solo 5 studenti totali, ciascuno raccomandato da tutti e tre i professori)
3. Cumulative: Esistono tre professori e cinque studenti tali che i professori (collettivamente) raccomandarono gli studenti (collettivamente), con molteplici configurazioni possibili

La lettura cumulativa richiede quantificazione su somme con verifica di relazione tra somme. Fasci permettono modellare questo definendo operazioni su gruppi:

$F_{\text{cumul}}(U)$  contiene funzioni che valutano relazioni  $R$  tra gruppi  $g_1, g_2$ :  $R(g_1, g_2) = 1 \Leftrightarrow$  esiste configurazione di relazioni atomiche tra membri di  $g_1$  e  $g_2$  che complessivamente soddisfa  $R$

Questa è area tecnicamente complessa dove teoria dei fasci offre strumenti per trattare strutture che sfidano logiche standard.

## 22.3 Comparativi e Superlativi: Classi di Comparazione e Standard Graduati

### 22.3.1 Semantica dei Comparativi: Gradi e Classi di Comparazione

Gli aggettivi graduabili ("alto", "veloce", "intelligente", "costoso") ammettono forme comparative ("più alto", "più veloce") che richiedono:

1. Ordinamento di individui lungo dimensione graduabile (scala)
2. Classe di comparazione contestualmente determinata

Comparativo: "Giovanni è più alto di Maria"

- Presuppone scala di altezza: funzione  $\mu_{\text{altezza}}: \text{Individui} \rightarrow \mathbb{R}$
- Asserisce:  $\mu_{\text{altezza}}(\text{Giovanni}) > \mu_{\text{altezza}}(\text{Maria})$

Ma consideriamo: "Giovanni è alto" Questa forma positiva (non-comparativa) è contestualmente dipendente: altezza di Giovanni è valutata rispetto a standard contestuale, che dipende dalla classe di comparazione.

"Giovanni è alto" può essere vero in contesto  $C_1$  (classe di comparazione = bambini di 5 anni) e falso in contesto  $C_2$  (classe di comparazione = giocatori di basket professionisti), anche se altezza di Giovanni è costante.

### 22.3.2 Fasci di Comparativi con Classi Variabili

Definiamo spazio  $K$  di possibili classi di comparazione. Una classe  $k \in K$  è insieme di individui rispetto ai quali comparazioni sono valutate.

Topologia su  $K$ : classi con membri sovrapposti o categorialmente simili sono vicine.

Il fascio  $F\_comp\_alto$  assegna a ogni aperto  $U \subseteq K$  standard di altezza contestuali:

$F\_comp\_alto(U) = \{\text{funzioni } \sigma: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ dove } \sigma(k) \text{ è altezza standard per classe } k\}$

Lo standard  $\sigma(k)$  è tipicamente funzione della distribuzione di altezze nella classe  $k$ :

- $\sigma(k)$  potrebbe essere media:  $\sigma(k) = \text{mean}(\{\mu\_altezza(x) : x \in k\})$
- O mediana, o percentile superiore, dipendendo da convenzioni contestuali

Un individuo  $a$  è "alto" rispetto a classe  $k$  sse:  $\mu\_altezza(a) > \sigma(k)$

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F\_comp\_alto(U) \rightarrow F\_comp\_alto(V)$  specializzano standard quando restringiamo classi di comparazione.

**Esempio:**

- $U\_persone\_generali$  contiene tutte le classi di persone (altezza standard  $\sigma \approx 170$  cm)
- $V\_basket \subset U\_persone\_generali$  contiene solo classi di giocatori di basket (altezza standard  $\sigma \approx 200$  cm)
- $\rho_{\{U\_persone, V\_basket\}}$  innalza lo standard

Individuo con altezza 180 cm:

- In  $U\_persone$ :  $180 > 170$ , quindi "alto" = vero
- In  $V\_basket$ :  $180 < 200$ , quindi "alto" = falso

La restrizione modifica valutazione contestuale.

### 22.3.3 Superlativi e Quantificazione su Domini Graduati

I superlativi ("il più alto", "il più veloce", "il meno costoso") quantificano su domini introducendo vincolo di massimalità o minimalità:

"Giovanni è lo studente più alto"  $\Leftrightarrow \forall x (x \text{ è studente} \rightarrow \mu\_altezza(\text{Giovanni}) \geq \mu\_altezza(x))$

Crucialmente, il dominio di quantificazione "studenti" è contestualmente ristretto. Non tutti gli studenti dell'universo, ma gli studenti salienti nel contesto.

Il fascio  $F\_sup\_alto$  combina quantificazione universale con comparazione graduata:

$F\_sup\_alto(U) = \{\text{funzioni che per ogni classe } k \in U \text{ determinano individuo/i massimali rispetto a } \mu\_altezza \text{ in } k\}$

Complicazione: superlativi ammettono letture multiple quando embedded:

"Ogni studente ha letto il libro più difficile"

Lettura relativa (de re): Per ogni studente  $x$ ,  $x$  ha letto il libro che è più difficile relativamente ai libri accessibili a  $x$  (libri diversi per studenti diversi)

Lettura assoluta (de dicto): C'è un libro che è globalmente più difficile, e ogni studente l'ha letto (stesso libro per tutti)

Queste letture corrispondono a diversi scope della descrizione definita superlativa rispetto al quantificatore universale, modellabile attraverso diversi ordini di applicazione di mappe di restrizione tra fasci.

## 22.4 Intensionalità e Distinzione De Re/De Dicto: Livelli di Incapsulamento Contestuale

### 22.4.1 Contesti Intensionali e Operatori Modali

Contesti intensionali (credere, volere, dovere, necessariamente) creano ambienti opachi dove sostituibilità di co-referenti fallisce:

"Luca crede che Espero sia una stella" - può essere vero "Luca crede che Fosforo sia una stella" - può essere falso Anche se Espero = Fosforo (stesso pianeta Venere)

La ragione è che "credere" crea contesto intensionale dove non conta referente attuale ma modo di presentazione (Frege: Sinn vs. Bedeutung).

Nella semantica intensionale standard (Montague), significati intensionali sono funzioni da mondi possibili (e/o tempi) a estensioni:  $\llbracket \text{stella} \rrbracket^w = \{x : x \text{ è stella nel mondo } w\}$

Verbi di credenza quantificano su mondi doxasticamente accessibili.

### 22.4.2 Fasci Intensionali: Sezioni su Spazi Modali

Estendiamo questo modellando intensionalità attraverso fasci su spazi di mondi possibili  $W$  dotati di relazioni di accessibilità  $R$ .

Per ogni mondo  $w$ , definiamo aperti:  $U_w = \{v \in W : wRv\}$  = mondi accessibili da  $w$

Il fascio intensionale  $F_\varphi$  di proposizione  $\varphi$  assegna:  $F_\varphi(U) = \{\text{funzioni che per ogni } w \in U \text{ specificano valore di verità di } \varphi \text{ in } w\}$

Operatore modale  $\Box\varphi$  ("necessariamente  $\varphi$ ") corrisponde a:  $\llbracket \Box\varphi \rrbracket(w) = 1 \Leftrightarrow$  per ogni  $v \in U_w$ ,  $\llbracket \varphi \rrbracket(v) = 1$

Ovvero,  $\varphi$  è necessaria in  $w$  sse  $\varphi$  è vera in tutto l'aperto  $U_w$ .

Operatore di credenza "Luca crede  $\varphi$ " quantifica su mondi doxastici:  $\llbracket \text{crede\_Luca } \varphi \rrbracket(w) = 1 \Leftrightarrow$  per ogni  $v \in U_w^{\text{Luca}}$ ,  $\llbracket \varphi \rrbracket(v) = 1$  dove  $U_w^{\text{Luca}} =$  mondi compatibili con credenze di Luca in  $w$

### 22.4.3 Distinzione De Re/De Dicto come Ordini di Restrizione

La distinzione de re/de dicto emerge naturalmente da diversi livelli di "incapsulamento" nella struttura di fascio.

Frase: "Luca crede che una spia lavori al ministero"

Lettura de dicto: Luca crede [che esista una spia che lavori al ministero]

- Il quantificatore esistenziale è all'interno dello scope del verbo di credenza
- Luca non ha in mente spia particolare; crede solo che esista qualcuna

Lettura de re: Esiste una spia tale che [Luca crede che lei lavori al ministero]

- Il quantificatore ha scope ampio, esterno al verbo di credenza
- C'è individuo particolare (de re = riguardo alla cosa) di cui Luca ha credenza

Modellazione tramite fasci:

- De dicto: Prima restringiamo a mondi doxastici di Luca, poi applichiamo quantificatore esistenziale. Il fascio  $F_{\exists \text{ spia}}$  è valutato su aperti  $U_{\text{doxastici}}$
- De re: Prima applichiamo quantificatore esistenziale nel mondo attuale, poi valutiamo credenza di Luca riguardo a quell'individuo specifico

Formalmente, ordini diversi di composizione morfismi: De dicto:  $[[\text{crede\_Luca}]](\lambda v. [[\exists \text{ spia}]](\lambda x. [[x \text{ lavora al ministero}]]_v))$  De re:  $[[\exists \text{ spia}]](\lambda x. [[\text{crede\_Luca}]](\lambda v. [[x \text{ lavora al ministero}]]_v))$

La teoria dei fasci predice che solo certi ordini sono ben-formati topologicamente: restrizioni devono essere compatibili con la struttura di accessibilità modale. Alcuni ordini generano ostruzioni (violano condizioni di incollamento), corrispondendo a letture agrammaticali o pragmaticamente incoerenti.

## 22.5 Sintesi: Composizionalità Topologica e Algebra dei Fasci

La semantica composizionale basata su fasci offre framework dove:

- **Significati sono sezioni di fasci**, non denotazioni atomiche fisse
- **Composizione è implementata tramite morfismi**, preservando struttura topologica
- **Ambiguità derivano da ordini alternativi** di applicazione di morfismi
- **Vincoli di buona formazione** corrispondono a condizioni di compatibilità topologica

Questo mantiene spirito della composizionalità (significato del tutto deriva sistematicamente dalle parti) ma arricchisce drasticamente il framework per catturare dipendenza contestuale, permettendo trattamento unificato di fenomeni avanzati: quantificazione con domini variabili, plurali con formazione contestuale di gruppi, comparativi con classi di comparazione modulabili, intensionalità con livelli di incapsulamento.

Prospettive future includono: estensione a linguaggio naturale completo con tutte le categorie sintattiche, implementazione computazionale di compositori di fasci, validazione sperimentale delle predizioni topologiche, applicazione a traduzione automatica e comprensione del linguaggio naturale in sistemi AI.

## **Capitolo 23: Pragmatica Conversazionale Estesa - Teoria della Pertinenza, Gestione del Turno e Riparazione attraverso Fasci Semantici**

### **23.1 Teoria della Pertinenza di Sperber & Wilson: Formalizzazione attraverso Fasci Cognitivi e Topologia dell'Effort-Effect**

La teoria della pertinenza (Relevance Theory) di Dan Sperber e Deirdre Wilson, sviluppata originariamente negli anni Ottanta come alternativa sistematica alla teoria griceana delle implicature conversazionali, propone che la comunicazione umana sia governata da un principio cognitivo universale di massimizzazione della pertinenza piuttosto che da massime conversazionali normative esplicitamente seguite. Secondo questa prospettiva teorica, gli esseri umani sono biologicamente predisposti a prestare attenzione agli stimoli più pertinenti nel loro ambiente cognitivo, e i comunicatori sfruttano questa predisposizione producendo enunciati che sono ottimamente pertinenti rispetto alle capacità ed aspettative degli ascoltatori.

La nozione centrale di "pertinenza" (relevance) nella teoria di Sperber & Wilson è definita attraverso due dimensioni fondamentali che interagiscono in modo sistematico e matematicamente formalizzabile. La prima dimensione è quella degli effetti cognitivi positivi (positive cognitive effects): uno stimolo comunicativo è pertinente nella misura in cui produce effetti cognitivi nel sistema cognitivo del ricevente, ovvero modificazioni dello stato cognitivo che rafforzano credenze esistenti, contraddicono e eliminano credenze precedenti, o permettono la derivazione di nuove conclusioni attraverso interazioni con assunzioni contestuali pregresse. La seconda dimensione è quella dello sforzo di elaborazione (processing effort): lo sforzo cognitivo, misurato in termini di risorse attenzionali, mnemoniche e computazionali, necessario per processare lo stimolo comunicativo ed estrarre gli effetti cognitivi rilevanti.

Formalizziamo queste intuizioni attraverso la teoria dei fasci costruendo uno spazio topologico complesso che cattura la geometria cognitiva della pertinenza. Definiamo innanzitutto uno spazio cognitivo multidimensionale  $C = C_{cred} \times C_{att} \times C_{cont}$  dove ciascuna componente rappresenta una dimensione dello spazio cognitivo di un agente comunicativo:

$C_{cred}$  rappresenta lo spazio delle possibili configurazioni di credenze e assunzioni dell'agente. Un punto  $c_{cred}$  in questo spazio specifica l'intero sistema di credenze dell'agente in un dato momento, organizzato come un insieme parzialmente ordinato di

proposizioni con gradi di forza (strength) che riflettono quanto fortemente ciascuna credenza è mantenuta. La topologia su  $C_{cred}$  è indotta dalla relazione di revisione minimale: due configurazioni di credenze  $c_{cred,1}$  e  $c_{cred,2}$  sono topologicamente vicine se differiscono minimamente, ovvero se la revisione da una all'altra richiede modificazioni di poche credenze con piccole variazioni di forza.

$C_{att}$  rappresenta lo spazio delle possibili allocazioni di risorse attenzionali. Un punto  $c_{att}$  specifica come le risorse attenzionali limitate dell'agente sono distribuite tra diversi stimoli, compiti e processi cognitivi concorrenti. Possiamo modellare  $C_{att}$  come un simpleso  $k$ -dimensionale normalizzato dove  $k$  è il numero di canali attenzionali indipendenti, e ogni punto rappresenta una distribuzione probabilistica delle risorse attenzionali tra questi canali. La topologia è quella standard del simpleso, riflettendo continuità nelle allocazioni attenzionali.

$C_{cont}$  rappresenta lo spazio dei contesti cognitivi, ovvero insiemi di assunzioni immediatamente accessibili e salienti che possono interagire con nuova informazione in arrivo. Un contesto cognitivo è un sottoinsieme proprio delle credenze totali dell'agente, quelle rese "mentalmente attive" o "manifeste" in un dato momento. La topologia su  $C_{cont}$  riflette relazioni di inclusione e sovrapposizione tra contesti: contesti con alta sovrapposizione di assunzioni sono topologicamente vicini.

Il prodotto cartesiano  $C = C_{cred} \times C_{att} \times C_{cont}$  con la topologia prodotto costituisce lo spazio cognitivo completo. Un punto  $c = (c_{cred}, c_{att}, c_{cont})$  in  $C$  specifica uno stato cognitivo completo: quali credenze l'agente mantiene, come le sue risorse attenzionali sono allocate, e quale contesto di assunzioni è attualmente saliente.

Definiamo ora il fascio della pertinenza  $F_{rel}$  su  $C$  che assegna a ogni aperto  $U \subseteq C$  e ogni stimolo comunicativo  $s$  un valore di pertinenza. La pertinenza è concettualizzata non come valore numerico semplice ma come struttura ricca che codifica la relazione effort-effect. Formalmente:

$F_{rel}(U) = \{\text{funzioni } R: U \times \text{Stimoli} \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ tali che } R(c,s) = (E(c,s), F(c,s)) \text{ dove } E(c,s) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ misura lo sforzo di elaborazione richiesto per processare } s \text{ nello stato } c, \text{ e } F(c,s) \in \mathbb{R} \text{ misura gli effetti cognitivi positivi prodotti}\}$

La funzione di sforzo  $E(c,s)$  dipende da molteplici fattori contestualmente determinati. Se lo stimolo  $s$  è linguisticamente complesso, sintatticamente ambiguo, lessicalmente oscuro, o pragmaticamente non convenzionale, richiede maggiore sforzo di elaborazione. Se lo stato cognitivo  $c$  ha il contesto rilevante già attivo e le assunzioni necessarie già accessibili, lo sforzo diminuisce. Possiamo decomporre  $E$  ulteriormente:

$$E(c,s) = E_{perc}(c,s) + E_{ling}(c,s) + E_{inf}(c,s)$$

dove  $E_{perc}$  è lo sforzo percettivo (decodificare segnale acustico o visivo),  $E_{ling}$  è lo sforzo linguistico (parsing sintattico, risoluzione ambiguità, recupero lessicale), e  $E_{inf}$  è lo sforzo inferenziale (derivare implicature, arricchire significato sottodeterminato, risolvere riferimenti).

La funzione di effetto  $F(c,s)$  misura quanto lo stimolo  $s$  modifica profondamente e produttivamente lo stato cognitivo  $c$ . Gli effetti cognitivi positivi includono:

1. Rafforzamento di credenze esistenti: se  $s$  fornisce evidenza aggiuntiva per proposizioni già credute, aumenta la loro forza, stabilizzando il sistema di credenze. L'effetto è proporzionale all'incremento di forza.
2. Eliminazione di credenze: se  $s$  contraddice proposizioni precedentemente mantenute con forza debole, e la forza evidenziale di  $s$  supera quella delle credenze precedenti, queste vengono eliminate, semplificando il sistema cognitivo. L'effetto è significativo perché riduce incoerenze potenziali.
3. Derivazione di nuove conclusioni: se  $s$  combinato con assunzioni contestuali in  $c_{\text{cont}}$  permette la derivazione inferenziale di proposizioni nuove non precedentemente credute, espande il sistema di credenze. L'effetto è massimo quando le nuove conclusioni sono numerose, non ovvie, e rilevanti per scopi o interessi dell'agente.

Formalmente, possiamo scrivere:

$$F(c,s) = \alpha \cdot |\text{Rafforzamenti}(c,s)| + \beta \cdot |\text{Eliminazioni}(c,s)| + \gamma \cdot |\text{NuoveConclusioniNonOvvie}(c,s)|$$

dove  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sono pesi che riflettono l'importanza relativa di ciascun tipo di effetto cognitivo, e le funzioni Rafforzamenti, Eliminazioni, NuoveConclusioniNonOvvie calcolano i rispettivi insiemi.

La pertinenza comparativa tra stimoli è definita attraverso una relazione d'ordine parziale sullo spazio  $\mathbb{R}^2$  dei vettori  $(E,F)$ . Uno stimolo  $s_1$  è più pertinente di  $s_2$  in stato  $c$  se:

- Produce maggiori effetti con stesso sforzo:  $F(c,s_1) > F(c,s_2)$  e  $E(c,s_1) = E(c,s_2)$
- Produce stessi effetti con minor sforzo:  $F(c,s_1) = F(c,s_2)$  e  $E(c,s_1) < E(c,s_2)$
- Più generalmente:  $F(c,s_1)/E(c,s_1) > F(c,s_2)/E(c,s_2)$  (migliore rapporto effetto/sforzo)

Questa relazione non è totale: esistono stimoli incomparabili dove  $s_1$  richiede più sforzo ma produce anche più effetti, e non c'è modo oggettivo di bilanciare le dimensioni.

Le mappe di restrizione del fascio  $F_{\text{rel}}$  catturano come la pertinenza si specializzi contestualmente. Se  $U$  è un aperto ampio rappresentante molti stati cognitivi possibili, e  $V \subseteq U$  è un aperto più ristretto rappresentante specializzazioni (per esempio,  $V$  contiene solo stati dove un certo contesto specifico è attivo), allora:

$$\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{rel}}(U) \rightarrow F_{\text{rel}}(V)$$

restringe le funzioni di pertinenza da  $U$  a  $V$ . Tipicamente, specializzando il contesto cognitivo (rendendo più assunzioni specifiche già attive), lo sforzo  $E$  diminuisce mentre gli effetti  $F$  possono aumentare (perché il contesto ricco permette più inferenze), quindi la pertinenza generalmente aumenta sotto specializzazione contestuale appropriata.

Il Principio Cognitivo di Pertinenza, formulato da Sperber & Wilson come principio universale che governa l'allocazione dell'attenzione umana, può essere formalizzato topologicamente come segue: il sistema cognitivo umano è programmato evolutivamente per massimizzare la pertinenza aspettata degli stimoli elaborati, ovvero per allocare risorse attenzionali preferenzialmente a stimoli che promettono il miglior rapporto effetto/sforzo. In termini del fascio, questo significa che la distribuzione di probabilità dell'attenzione sull'insieme degli stimoli è proporzionale alla pertinenza:

$$P(\text{attend}(s) | c) \propto F(c,s) / E(c,s)$$

Questa è una distribuzione di Gibbs/Boltzmann dove la "temperatura" controlla quanto strettamente l'attenzione segue il gradiente di pertinenza.

Il Principio Comunicativo di Pertinenza afferma che ogni atto comunicativo ostensivo (ovvero, ogni stimolo prodotto con l'intenzione di attirare attenzione) comunica una presunzione di propria pertinenza ottimale: il comunicatore garantisce implicitamente che lo stimolo è sufficientemente pertinente da meritare l'elaborazione, e che è lo stimolo più pertinente che il comunicatore era disposto/capace di produrre compatibilmente con le sue abilità e preferenze. Formalmente, producendo stimolo  $s$ , il parlante  $P$  comunica all'ascoltatore  $A$ :

1.  $s$  è sufficientemente pertinente da meritare elaborazione da parte di  $A$ :  $F(c_A, s) / E(c_A, s) > \theta$  per qualche soglia  $\theta > 0$
2.  $s$  è lo stimolo più pertinente compatibile con preferenze di  $P$ : per ogni  $s'$  alternativo che  $P$  avrebbe potuto produrre, o  $s$  è più pertinente di  $s'$  per  $A$ , o  $s'$  richiede costi/sforzi per  $P$  che  $P$  non era disposto a sostenere

Questa presunzione di pertinenza ottimale è essa stessa una sezione del fascio  $F_{rel}$ , una meta-informazione sulla pertinenza che guida l'elaborazione interpretativa. L'ascoltatore, ricevendo  $s$  e riconoscendo la natura ostensiva di  $s$ , può inferire che  $P$  ha scelto  $s$  per massimizzare la pertinenza per  $A$  dato i vincoli di  $P$ , e questo permette all'ascoltatore di limitare lo spazio delle interpretazioni candidate di  $s$  a quelle compatibili con questa ipotesi di pertinenza ottimale.

## 23.2 Implicature come Percorsi di Massima Pertinenza nello Spazio delle Interpretazioni

La derivazione di implicature conversazionali, nella prospettiva della teoria della pertinenza, non è vista come applicazione di massime conversazionali normative (come nella teoria griceana) ma come risultato di un processo inferenziale automatico di ricerca della interpretazione che massimizza la pertinenza dato lo stimolo comunicativo e il contesto cognitivo. L'ascoltatore, assumendo la presunzione di pertinenza ottimale comunicata dal parlante, segue un "percorso di massima pertinenza" attraverso lo spazio delle possibili interpretazioni, arrestandosi alla prima interpretazione che soddisfa le aspettative di pertinenza.



Formalizziamo questo processo costruendo uno spazio topologico  $I$  di interpretazioni possibili. Un'interpretazione  $i \in I$  specifica:

- Una forma logica esplicita (il contenuto semantico minimale decodificato dall'espressione linguistica)
- Arricchimenti contestuali (assegnamenti di referenti, disambiguazioni, saturazioni di variabili libere)
- Implicature esplicite (espansioni pragmatiche del contenuto esplicito)
- Implicature implicite (conclusioni derivate per inferenza dal contenuto esplicito arricchito combinato con assunzioni contestuali)

La topologia su  $I$  riflette "vicinanza interpretativa": due interpretazioni  $i_1$  e  $i_2$  sono topologicamente vicine se differiscono minimalmente, condividendo la forma logica, molti arricchimenti, e molteplici implicature. La distanza interpretativa può essere definita come:

$$d(i_1, i_2) = w_{FL} \cdot d_{FL}(FL(i_1), FL(i_2)) + w_{arr} \cdot d_{arr}(Arr(i_1), Arr(i_2)) + w_{imp} \cdot d_{imp}(Imp(i_1), Imp(i_2))$$

dove  $d_{FL}$  misura differenze nelle forme logiche,  $d_{arr}$  misura differenze negli arricchimenti,  $d_{imp}$  misura differenze nelle implicature, e  $w_{FL}$ ,  $w_{arr}$ ,  $w_{imp}$  sono pesi.

Il fascio della pertinenza interpretativa  $F_{rel\_int}$  su  $I$  assegna a ogni interpretazione  $i$  la sua pertinenza nello stato cognitivo corrente  $c$ :

$$F_{rel\_int}(U)(i) = (E(c,i), F(c,i))$$

dove ora lo sforzo  $E(c,i)$  è lo sforzo di costruire e verificare l'interpretazione  $i$  dato  $c$ , e l'effetto  $F(c,i)$  è il totale degli effetti cognitivi prodotti assumendo  $i$  come interpretazione corretta dello stimolo.

Il processo interpretativo consiste nel cercare un'interpretazione  $i^*$  che massimizza la pertinenza:

$$i^* = \operatorname{argmax}_{\{i \in I\}} F(c,i) / E(c,i)$$

Tuttavia, questo processo non è una ricerca esaustiva globale (computazionalmente intrattabile) ma una ricerca euristica locale guidata da principi di accessibilità e salienza. L'ascoltatore segue un "percorso di massima pendenza" (gradient ascent) nello spazio  $I$ , partendo dall'interpretazione più semplice e minimale (forma logica pura senza arricchimenti) e aggiungendo progressivamente arricchimenti e implicature che aumentano la pertinenza, arrestandosi quando le aspettative di pertinenza sono soddisfatte.

Formalmente, il percorso interpretativo è una curva continua  $\gamma: [0,T] \rightarrow I$  dove:

- $\gamma(0) = i_{\text{minimale}}$  (interpretazione minimale, solo forma logica)
- $\gamma(T) = i^*$  (interpretazione finale ottimalmente pertinente)
- Per ogni  $t$ , la derivata  $d\gamma/dt$  punta nella direzione di massimo incremento di pertinenza locale

Questo percorso attraversa lo spazio delle interpretazioni topologicamente, visitando interpretazioni progressivamente più ricche e arricchite. Le implicature emergono naturalmente come componenti dell'interpretazione finale  $i^*$  che non erano presenti nell'interpretazione minimale  $i_{\text{minimale}}$  ma sono state aggiunte perché necessarie per raggiungere la pertinenza attesa.

Un aspetto cruciale è che il percorso si arresta alla prima interpretazione che soddisfa le aspettative di pertinenza, non necessariamente all'interpretazione globalmente ottimale. Questo riflette il principio cognitivo di effort-minimization: gli esseri umani non continuano a elaborare indefinitamente cercando interpretazioni sempre migliori, ma si arrestano a una interpretazione "sufficientemente buona" che giustifica lo sforzo di elaborazione investito. Formalmente, l'arresto avviene quando:

$$F(c, \gamma(T)) / E(c, \gamma(T)) \geq \theta_{\text{asp}}$$

dove  $\theta_{\text{asp}}$  è la soglia di aspettativa di pertinenza comunicata dalla presunzione di pertinenza ottimale.

### 23.3 Gestione del Turno Conversazionale: Topologia dei Transition Relevance Places e Fasci di Diritti Comunicativi

La conversazione spontanea faccia a faccia è organizzata attraverso un sistema sofisticato di gestione del turno (turn-taking) che coordina le contribuzioni dei partecipanti minimizzando sovrapposizioni simultanee e pause eccessivamente lunghe. L'analisi conversazionale nella tradizione di Sacks, Schegloff e Jefferson ha identificato strutture ricorrenti e sistematicità nella gestione del turno, inclusi i "transition relevance places" (TRP) - punti nella produzione linguistica dove la transizione da un parlante al successivo diventa pragmaticamente rilevante e possibile.

Modelliamo la struttura temporale della conversazione come uno spazio topologico  $T$  che rappresenta il flusso temporale continuo dell'interazione. I punti in  $T$  sono istanti temporali  $t \in [0, T_{\text{conversazione}}]$ , e la topologia è quella euclidea standard su  $\mathbb{R}$ . Tuttavia, sovrapponiamo a questa struttura temporale base una struttura aggiuntiva di TRP: certi punti (o piccoli intorno) in  $T$  sono marcati come transition relevance places, dove le regole conversazionali permettono e favoriscono la transizione tra parlanti.

Definiamo un sottospazio  $\text{TRP} \subset T$  costituito dall'unione di tutti gli intorno temporali che sono transition relevance places. La topologia su  $\text{TRP}$  è quella indotta dalla topologia di  $T$ . Gli aperti  $U \subseteq \text{TRP}$  rappresentano "regioni di transizionabilità" dove cambio di turno è sistematicamente possibile.

I TRP non sono distribuiti uniformemente o arbitrariamente nel tempo conversazionale, ma sono fortemente correlati con completamenti sintattici e prosodici delle unità costruttive del turno (Turn Constructional Units, TCU). Una TCU è un'unità linguistica che costituisce una possibile contribuzione completa: può essere una clausola, una frase, un sintagma, o anche

una singola parola in contesti appropriati. La fine proiettata di una TCU coincide tipicamente con un TRP.

Definiamo un fascio  $F\_TCU$  su  $T$  che assegna a ogni intorno temporale  $U \subseteq T$  l'insieme delle TCU in corso o completate in quegli istanti:

$$F\_TCU(U) = \{\text{unità costruttive } \tau \text{ tali che l'intervallo temporale di } \tau \text{ interseca } U\}$$

Le TCU hanno struttura interna: inizio, sviluppo, completamento proiettato. Il fascio  $F\_TCU$  codifica questa struttura assegnando a ogni  $\tau$  non solo il suo contenuto linguistico ma anche la sua "traiettoria di completamento" - una funzione che per ogni istante  $t$  durante la produzione di  $\tau$  specifica quanto è vicino il completamento proiettato.

I TRP emergono topologicamente come punti (o piccoli intorni) dove il fascio  $F\_TCU$  ha sezioni che rappresentano TCU completate o molto prossime al completamento. Formalmente, un istante  $t$  è un TRP se esiste una TCU  $\tau$  in corso o appena completata tale che la distanza proiettata al completamento di  $\tau$  è minore di una soglia  $\varepsilon$ :

$$t \in \text{TRP} \Leftrightarrow \exists \tau \in F\_TCU(U_t), \text{dist\_completamento}(\tau, t) < \varepsilon$$

dove  $U_t$  è un piccolo intorno di  $t$ , e  $\text{dist\_completamento}$  misura quanto manca al completamento sintattico-prosodico.

Oltre al fascio delle TCU, definiamo un fascio di diritti comunicativi  $F\_diritti$  che assegna a ogni istante temporale e ogni partecipante  $p$  uno stato di diritto/dovere comunicativo:

$$F\_diritti(U)(p, t) \in \{\text{parlante\_corrente, destinatario\_selezionato, auto-selezionabile, non-selezionabile}\}$$

Questo fascio codifica la "morale conversazionale" distribuita: chi ha il diritto di parlare, chi ha il dovere di rispondere, chi può competere per il prossimo turno. Le transizioni tra stati sono governate da regole sistematiche:

1. Se  $p$  è *parlante\_corrente* al tempo  $t$  e  $t'$  è un TRP successivo, allora a  $t'$   $p$  può:
  - Selezionare un prossimo parlante esplicitamente (tramite domande dirette, chiamate di attenzione, sguardi, gesti): il destinatario diventa *destinatario\_selezionato*
  - Non selezionare nessuno: tutti gli altri diventano *auto-selezionabili*
  - Continuare oltre il TRP:  $p$  rimane *parlante\_corrente*
2. Se  $p$  è *destinatario\_selezionato* a un TRP  $t$ , allora  $p$  ha il diritto preferenziale e quasi-obbligo di prendere il turno a  $t$ . Se  $p$  non inizia a parlare entro una piccola finestra temporale, il diritto decade e gli altri diventano *auto-selezionabili*.
3. Se  $p$  è *auto-selezionabile* a un TRP  $t$ , allora  $p$  può competere per il turno. Il primo a iniziare la produzione linguistica (*first starter gets rights*) diventa il nuovo *parlante\_corrente*.

Le mappe di restrizione del fascio  $F_{\text{diritti}}$  catturano come i diritti conversazionali evolvano temporalmente. Se  $U = [t_1, t_2]$  è un intervallo temporale ampio e  $V = [t_1', t_2'] \subseteq U$  è un sotto-intervallo, allora:

$$\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{diritti}}(U) \rightarrow F_{\text{diritti}}(V)$$

restringe la configurazione di diritti all'intervallo più breve, proiettando l'evoluzione temporale. La continuità e coerenza delle restrizioni riflettono che i diritti conversazionali non cambiano arbitrariamente ma seguono transizioni regolamentate.

## 23.4 Sovrapposizioni e Violazioni: Ostruzioni Coomologiche alla Coordinazione Perfetta

In conversazioni reali, la coordinazione del turno non è perfetta. Si verificano sovrapposizioni (overlaps) dove due o più partecipanti parlano simultaneamente, e gap eccessivamente lunghi dove nessuno parla dopo un TRP. Queste deviazioni dalla coordinazione ideale possono essere modellate come ostruzioni coomologiche all'incollamento di sezioni del fascio dei diritti comunicativi.

Consideriamo un ricoprimento dell'intervallo temporale conversazionale  $T = [0, T_{\text{fine}}]$  attraverso gli intervalli di produzione dei diversi partecipanti. Se  $P_1$  produce un turno su intervallo  $U_1 = [t_1, t_2]$  e  $P_2$  produce un turno su intervallo  $U_2 = [t_3, t_4]$ , idealmente dovremmo avere  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  (nessuna sovrapposizione) con  $t_2 \approx t_3$  (transizione immediata senza gap).

Definendo sezioni locali del fascio  $F_{\text{diritti}}$  su  $U_1$  e  $U_2$ :

- $s_1 \in F_{\text{diritti}}(U_1)$ : "P1 è parlante\_corrente su  $U_1$ "
- $s_2 \in F_{\text{diritti}}(U_2)$ : "P2 è parlante\_corrente su  $U_2$ "

Per la condizione di incollamento del fascio, queste sezioni locali dovrebbero essere compatibili sulla sovrapposizione  $U_1 \cap U_2$ . Se  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ , la compatibilità è vacua e l'incollamento riesce. Ma se  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$  (sovrapposizione effettiva), allora:

$$s_1|_{\{U_1 \cap U_2\}} = "P1 \text{ parlante\_corrente}" \quad s_2|_{\{U_1 \cap U_2\}} = "P2 \text{ parlante\_corrente}"$$

Questi sono incompatibili: non possono esserci due parlanti\_corrente simultaneamente secondo le regole ideali. Il cobordo  $\delta^0(s_1, s_2)$  è non zero sulla sovrapposizione, generando un elemento non banale in  $H^1(T, F_{\text{diritti}})$ .

La presenza di  $H^1 \neq 0$  misura l'ostruzione coomologica alla coordinazione perfetta. In conversazioni altamente coordinate con poche sovrapposizioni,  $H^1$  è piccolo (pochi elementi non banali, ostruzioni rare). In conversazioni caotiche con molte sovrapposizioni e conflitti di turno,  $H^1$  è grande (molte ostruzioni, difficoltà sistemica di incollamento).

Gli overlap possono essere di diversi tipi con significati interazionali diversi:

1. Overlap competitivi: tentativo di "rubare" il turno prima che il parlante corrente raggiunga un TRP. Questi violano le regole normative e spesso generano riparazione.
2. Overlap cooperativi: completamento collaborativo della frase del parlante corrente, o back-channel (segnali di ascolto attivo come "mhm", "sì", "capisco") che non competono per il turno ma dimostrano allineamento.
3. Overlap transizionali: iniziare a parlare leggermente prima del TRP proiettato, anticipando di poche centinaia di millisecondi il completamento. Questi sono tollerati e comuni.

Possiamo modellare questi tipi diversi attraverso sotto-fasce di  $F_{\text{overlap}}$ :

$$F_{\text{overlap\_competitivo}} \subset F_{\text{overlap\_totale}} \quad F_{\text{overlap\_cooperativo}} \subset F_{\text{overlap\_totale}}$$

dove ciascun sotto-fascio soddisfa vincoli specifici sulle configurazioni di sovrapposizione ammissibili.

## 23.5 Riparazione Conversazionale: Fasci di Troublesources e Sequenze di Fix

La riparazione (repair) è il processo attraverso cui i partecipanti conversazionali gestiscono problemi o "troublesources" - elementi che ostacolano la comunicazione, inclusi errori linguistici, problemi di udibilità, ambiguità, violazioni di aspettative, problemi di riferimento. L'analisi conversazionale ha identificato una organizzazione sistematica della riparazione con posizioni strutturalmente definite e preferenze normative.

Modelliamo lo spazio conversazionale come dotato non solo di struttura temporale ma anche di "strati" (layers) corrispondenti a diversi livelli di processamento comunicativo:

- Strato percettivo: rilevamento del segnale acustico/visivo
- Strato linguistico: parsing, risoluzione lessicale
- Strato proposizionale: costruzione del contenuto
- Strato pragmatico: interpretazione delle intenzioni comunicative
- Strato interazionale: gestione della relazione sociale

I troublesources possono emergere a qualunque strato. Definiamo un fascio  $F_{\text{trouble}}$  che assegna a ogni regione spazio-temporale-stratale l'insieme dei troublesources rilevati o rilevabili:

$$F_{\text{trouble}}(U \times L) = \{\text{problemi comunicativi } \tau \text{ rilevati nello strato } L \text{ durante intervallo } U\}$$

I troublesources hanno proprietà:

- Source: chi/cosa ha prodotto il problema (parlante corrente, parlante precedente, rumore esterno, ambiguità strutturale)

- Nature: tipo di problema (non udito, non capito, inaspettato, errato)
- Severity: gravità del problema (minore/ignorabile vs maggiore/bloccante)

La riparazione è organizzata attraverso posizioni temporalmente strutturate:

1. Same-turn self-repair: il parlante corrente ripara il proprio problema durante lo stesso turno, prima di raggiungere TRP. Esempio: "Vado a Mil- a Roma" (correzione immediata)
2. Transition-space self-repair: il parlante corrente ripara immediatamente dopo un TRP, prima che altri prendano il turno. Esempio: "È verde. No rosso."
3. Next-turn other-repair: un altro partecipante inizia riparazione nel turno immediatamente successivo. Esempio: A: "Giovanni abita a Parigi" B: "Londra vuoi dire"
4. Third-turn self-repair: il parlante originale ripara nel terzo turno dopo che altro partecipante ha segnalato problema. Esempio: A: "L'ho visto ieri" B: "Chi?" A: "Giovanni"

Queste posizioni formano una gerarchia di preferenza: same-turn self-repair è preferita (minimalizza disruzione), other-repair è dispreferita (faccia-minacciante). Modelliamo questa struttura preferenziale attraverso un ordine parziale sullo spazio delle sequenze di riparazione.

Definiamo un fascio  $F_{\text{repair}}$  che assegna a ogni troublesource  $\tau$  e ogni intervallo temporale  $U$  le possibili sequenze di riparazione:

$$F_{\text{repair}}(U)(\tau) = \{\text{sequenze } S \text{ di mosse riparative che risolvono } \tau \text{ durante } U\}$$

Una sequenza  $S = (m_1, m_2, \dots, m_n)$  è una lista ordinata di mosse riparative, ciascuna con:

- Speaker: chi esegue la mossa
- Position: posizione temporale-strutturale (same-turn, next-turn, etc)
- Type: tipo di mossa (auto-riparazione, segnalazione di problema, correzione, chiarificazione)
- Outcome: se la riparazione riesce

Le mappe di restrizione  $p_{\{U,V\}}: F_{\text{repair}}(U) \rightarrow F_{\text{repair}}(V)$  per  $V \subseteq U$  modellano come le sequenze riparative si specializzano quando restringiamo l'orizzonte temporale. Se  $V$  copre solo le prime fasi della riparazione,  $p_{\{U,V\}}$  proietta la sequenza completa  $S$  alle mosse iniziali contenute in  $V$ .

La struttura preferenziale delle riparazioni emerge topologicamente come regioni nello spazio  $F_{\text{repair}}$  dove certi tipi di sequenze sono dense (frequenti, salienti) mentre altri sono sparsi (rari, marcati). Gli aperti  $U_{\text{preferito}} \subseteq F_{\text{repair}}$  contengono sequenze di tipo preferito (brevi, auto-iniziate, auto-completate), mentre le regioni chiuse rappresentano sequenze dispreferite (prolungate, other-iniziate).

## 23.6 Correzione e Meta-Comunicazione: Fasci di Secondo Ordine

La correzione (correction) è un sottotipo specifico di riparazione dove il troublesource è un errore fattuale, linguistico, o normativo, e la riparazione consiste nel sostituire l'elemento errato con quello corretto. Le correzioni hanno struttura meta-comunicativa: non solo trasmettono contenuto ma commentano su comunicazione precedente, valutandola come inadeguata.

Modelliamo meta-comunicazione attraverso fasci di secondo ordine: fasci definiti non direttamente su spazi contestuali ma su fasci di primo ordine. Se  $F_{comm}$  è il fascio delle contribuzioni comunicative ordinarie, definiamo:

$$F_{meta} = \text{Hom}(F_{comm}, F_{evaluations})$$

il fascio dei morfismi dal fascio comunicativo al fascio delle valutazioni. Una sezione  $s \in F_{meta}(U)$  è una funzione che prende contribuzioni comunicative in  $U$  e le valuta (corretto/errato, appropriato/inappropriato, chiaro/oscuo).

Le correzioni sono sezioni specifiche di  $F_{meta}$  che assegnano valutazione "errato" a certe contribuzioni precedenti e propongono alternative valutate come "corretto". La struttura delle correzioni rispecchia quella generale delle riparazioni, con posizioni preferenziali e organizzazione sequenziale.

Un aspetto delicato delle correzioni è il facework (gestione delle facce sociali). Correggere qualcuno è potenzialmente faccia-minacciante, implicando incompetenza o errore. Diverse strategie mitigano questa minaccia:

1. Modalizzazione: "Forse volevi dire..." (incertezza epistemica)
2. Attribuzione esterna: "Credo che il problema sia..." (non colpa dell'interlocutore)
3. Umore: correzione scherzosa che defusa tensione
4. Account: spiegazione che giustifica la correzione come necessaria

Queste strategie possono essere modellate come morfismi:

$$\phi_{mitigate}: F_{correction\_diretta} \rightarrow F_{correction\_mitigata}$$

che trasformano correzioni faccia-minaccianti in forme socialmente attenuate.

La compatibilità dei morfismi con restrizioni contestuali garantisce che le strategie di mitigazione si comportino coerentemente:

$$\rho^{\{mitigata\}}_{\{U,V\}} \circ \phi_{mitigate} = \phi_{mitigate} \circ \rho^{\{diretta\}}_{\{U,V\}}$$

Specializzare il contesto sociale e poi mitigare = mitigare e poi specializzare.

## Capitolo 24: Aspetti Computazionali della Teoria dei Fasci Semantici - Algoritmi, Complessità e Implementazioni Pratiche Complete

### 24.1 Fondamenti Computazionali: Dalla Teoria Matematica agli Algoritmi Eseguibili

La transizione dalla teoria matematica astratta dei fasci semantici a implementazioni computazionali concrete richiede affrontare sfide fondamentali che emergono dalla natura continua, infinita e altamente strutturata degli oggetti matematici coinvolti. Gli spazi topologici contestuali che abbiamo costruito sono tipicamente spazi continui con cardinalità non numerabile, i fasci sono funtori controvarianti su categorie potenzialmente infinite, le operazioni coomologiche richiedono calcoli su complessi di cocatene di dimensione arbitraria. Nessuno di questi oggetti può essere rappresentato o manipolato direttamente da un computer digitale con memoria finita e tempo di esecuzione limitato.

La strategia generale per rendere computazionalmente trattabile la teoria dei fasci consiste in una catena di approssimazioni, discretizzazioni e limitazioni sistematiche che preservano le proprietà essenziali mentre sacrificano aspetti che, sebbene matematicamente eleganti, non sono cruciali per applicazioni pratiche. Questa strategia si articola attraverso i seguenti passi metodologici fondamentali:

Primo, discretizzazione dello spazio topologico base  $X$ . Invece di lavorare con lo spazio contestuale continuo completo, selezioniamo un sottoinsieme finito  $X_{\text{disc}} = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  di contesti prototipici rappresentativi. La scelta di questi contesti prototipici non è arbitraria ma guidata da considerazioni di copertura (i prototipi devono coprire le principali regioni dello spazio contestuale) e distintività (prototipi devono essere sufficientemente distanti da catturare variazioni semantiche significative). Tecniche di clustering come k-means, clustering gerarchico, o metodi basati su grafi possono essere impiegate per selezionare automaticamente prototipi ottimali dato un corpus di contesti osservati.

Secondo, finitizzazione della topologia. Su  $X_{\text{disc}}$  finito, specifichiamo la topologia enumerando esplicitamente gli aperti, o più economicamente, specificando una base finita  $B = \{B_1, B_2, \dots, B_m\}$  dove ogni  $B_i \subseteq X_{\text{disc}}$  e ogni aperto è unione di elementi base. La dimensione della base  $m$  è tipicamente polinomiale in  $n$  (numero di prototipi), per esempio  $m = O(n^2)$  se includiamo tutti gli aperti generati da coppie di prototipi. La topologia completa  $\tau$  generata da  $B$  può avere dimensione esponenziale (fino a  $2^n$  aperti nel caso estremo della topologia discreta), ma nella pratica molte topologie semantiche hanno struttura sparsa dove solo una piccola frazione degli aperti possibili è semanticamente rilevante.

Terzo, rappresentazione finita di fasci. Un fascio  $F$  su  $X_{\text{disc}}$  è rappresentato attraverso:

- Dizionario sections:  $U \rightarrow F(U)$  che mappa aperti (o aperti base) ai loro insiemi di sezioni



- Dizionario restrictions:  $(U, V) \rightarrow (F(U) \rightarrow F(V))$  che mappa coppie di aperti  $U \supseteq V$  a funzioni di restrizione

Poiché enumeriamo solo aperti rilevanti (non tutti i  $2^n$  possibili), e memorizziamo solo restrizioni tra aperti effettivamente usati, la rappresentazione rimane gestibile. Le sezioni stesse sono rappresentate in modo dipendente dal dominio: per fasci semantici lessicali, le sezioni possono essere strutture dati che codificano interpretazioni (per esempio, grafi semantici, frame con ruoli, vettori di features semantiche).

Quarto, algoritmi di calcolo coomologico. Il calcolo dei gruppi di coomologia  $H^n(X_{\text{disc}}, F)$  è ricondotto ad algebra lineare (per fasci di gruppi abeliani o moduli) o ad algoritmi combinatorici (per fasci di insiemi). I complessi di cocatene sono matrici sparse di dimensione polinomiale in  $n$  e  $m$ , e le operazioni di nucleo, immagine e quoziente sono computabili con algoritmi standard della teoria computazionale dell'algebra lineare.

Analizziamo ora in dettaglio algoritmico ciascuno di questi aspetti.

## 24.2 Algoritmi di Discretizzazione e Selezione di Prototipi Contestuali

Dato un corpus testuale annotato  $C = \{(t_1, \text{ctx}_1), (t_2, \text{ctx}_2), \dots, (t_N, \text{ctx}_N)\}$  dove ciascun  $t_i$  è un testo e  $\text{ctx}_i$  è il contesto annotato (potenzialmente multi-dimensionale, includendo informazioni situazionali, sociali, temporali, etc.), il problema è selezionare  $k$  contesti prototipici  $\{c_1^*, \dots, c_k^*\}$  che minimizzano una funzione di perdita che misura quanto bene i prototipi rappresentano il corpus completo.

Definiamo una funzione di distanza contestuale  $d_{\text{ctx}}: \text{Ctx} \times \text{Ctx} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  che misura dissimilarità tra contesti. Per contesti rappresentati come vettori di features  $\text{ctx} \in \mathbb{R}^m$ , possiamo usare distanze standard:

- Euclidea:  $d_{\text{euc}}(\text{ctx}_1, \text{ctx}_2) = \|\text{ctx}_1 - \text{ctx}_2\|_2$
- Manhattan:  $d_{\text{man}}(\text{ctx}_1, \text{ctx}_2) = \|\text{ctx}_1 - \text{ctx}_2\|_1$
- Coseno:  $d_{\text{cos}}(\text{ctx}_1, \text{ctx}_2) = 1 - (\text{ctx}_1 \cdot \text{ctx}_2) / (\|\text{ctx}_1\| \|\text{ctx}_2\|)$

Per contesti rappresentati come strutture discrete (configurazioni di features categoriali), possiamo usare distanze di Hamming, Jaccard, o edit distance.

### Algoritmo 1: k-Prototypes Clustering per Selezione Contestuale

Input: Corpus  $C = \{\text{ctx}_i\}_{i=1..N}$ , numero di prototipi  $k$ , distanza  $d_{\text{ctx}}$ , max iterazioni  $T$

Output: Insieme di prototipi  $P = \{c_1^*, \dots, c_k^*\}$ , assegnamento cluster  $A: \{1..N\} \rightarrow \{1..k\}$

1. Inizializzazione:

Seleziona  $k$  contesti casuali da  $C$  come prototipi iniziali:  $P = \{c_1^*, \dots, c_k^*\}$

2. For  $t = 1$  to  $T$ :

a. Assignment Step:

For each  $i = 1$  to  $N$ :

$$A(i) = \operatorname{argmin}_{j \in \{1..k\}} d_{\text{ctx}}(\text{ctx}_i, c_j^*)$$

b. Update Step:

For each  $j = 1$  to  $k$ :

$$\text{Cluster}_j = \{\text{ctx}_i : A(i) = j\}$$

$$c_j^* = \operatorname{argmin}_{\text{ctx} \in \text{Cluster}_j} \sum_{\text{ctx}' \in \text{Cluster}_j} d_{\text{ctx}}(\text{ctx}, \text{ctx}')$$

(il prototipo è il medoide, il punto che minimizza somma distanze agli altri nel cluster)

c. Convergence Check:

If prototipi non cambiano significativamente:

Break

3. Return  $P, A$

Questo algoritmo ha complessità  $O(T \cdot N \cdot k \cdot m)$  dove  $m$  è il costo di calcolare  $d_{\text{ctx}}$ , tipicamente  $O(\text{dimensionalità features})$ . Con  $T = O(\log N)$  iterazioni tipiche, la complessità totale è  $O(N k \log N)$ .

Una volta selezionati i prototipi, dobbiamo definire la topologia su  $X_{\text{disc}} = P$ . Un approccio data-driven costruisce aperti base riflettendo pattern di co-occorrenza e similarità osservati nel corpus.

### Algoritmo 2: Costruzione Base Topologica da Similarità

Input: Prototipi  $P = \{c_1^*, \dots, c_k^*\}$ , soglia similarità  $\theta$ , matrice similarità  $S$

Output: Base topologica  $B$

1. Inizializza  $B = \{\emptyset, P\}$  (aperti banali obbligatori)
  
2. For each prototipo  $c_i \in P$ :
   
 $B = B \cup \{c_i\}$  (singleton aperti, se topologia sufficientemente fine)
  
3. For each coppia  $(c_i, c_j)$  con  $i < j$ :
   
 If  $S(c_i, c_j) > \theta$  (prototipi sufficientemente simili):
   
 $B = B \cup \{c_i, c_j\}$  (aperto binario)
  
4. For each tupla  $(c_i, c_j, c_k)$  con  $i < j < k$ :
   
 If  $S(c_i, c_j) > \theta$  and  $S(c_j, c_k) > \theta$  and  $S(c_i, c_k) > \theta$ :
   
 $B = B \cup \{c_i, c_j, c_k\}$  (aperto ternario)
  
5. Chiusura per unione:
   
 Repeat:
   
 For each  $B_i, B_j \in B$ :
   
 If  $B_i \cup B_j$  non è già in  $B$  e soddisfa vincoli semantici:
   
 $B = B \cup \{B_i \cup B_j\}$ 
  
 Until no new elements added
  
6. Return  $B$

La complessità del passo 5 è potenzialmente esponenziale se non limitato. In pratica, limitiamo la dimensione massima degli aperti (per esempio,  $|U| \leq 10$ ) e usiamo criteri semantici per pruning (un aperto  $U$  è semanticamente coerente solo se i contesti in  $U$  condividono features rilevanti).

## 24.3 Rappresentazione e Manipolazione di Fasci: Strutture Dati Ottimizzate

Un fascio  $F$  su spazio discreto  $(X_{\text{disc}}, \tau)$  è rappresentato attraverso una struttura dati composta che supporta operazioni fondamentali:

class DiscreteSheaf:

```
def __init__(self, space):
```

```
    """
```

```
    space: TopologicalSpace object con base discreto  $X_{\text{disc}}$  e topologia  $\tau$ 
```

```
    """
```

```
    self.space = space
```

```
    self.sections_cache = {} # Memoizza sezioni per aperti
```

```
    self.restrictions_cache = {} # Memoizza mappe di restrizione
```

```
def get_sections(self, U):
```

```
    """
```

```
    Ritorna insieme (o lista) di sezioni  $F(U)$  sull'aperto  $U$ 
```

```
    Complessità:  $O(1)$  se cached, altrimenti  $O(\text{cost\_compute\_sections})$ 
```

```
    """
```

```
    if U not in self.sections_cache:
```

```
        self.sections_cache[U] = self._compute_sections(U)
```

```
    return self.sections_cache[U]
```

```
def _compute_sections(self, U):
```

```
    """
```

```
    Metodo astratto: sottoclassi implementano logica specifica
```

```
    per calcolare sezioni su  $U$ 
```

```
    """
```

```
raise NotImplementedError
```

```
def restrict(self, section, U, V):
```

```
    """
```

```
    Applica mappa di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F(U) \rightarrow F(V)$ 
```

```
    Precondizione:  $V \subseteq U$ 
```

```
    Complessità:  $O(\text{cost\_restriction})$  dipendente da tipo sezione
```

```
    """
```

```
    assert V.is_subset_of(U), "V deve essere sottoinsieme di U"
```

```
    key = (U, V)
```

```
    if key not in self.restrictions_cache:
```

```
        self.restrictions_cache[key] = self._compute_restriction_map(U, V)
```

```
    restriction_map = self.restrictions_cache[key]
```

```
    return restriction_map(section)
```

```
def _compute_restriction_map(self, U, V):
```

```
    """
```

```
    Calcola mappa di restrizione. Ritorna funzione  $F(U) \rightarrow F(V)$ 
```

```
    """
```

```
    raise NotImplementedError
```

```
def check_sheaf_axioms(self):
```

```
    """
```

```
    Verifica assiomi del fascio:
```

1. Identità:  $\rho_{\{U,U\}} = \text{id}$
2. Composizionalità:  $\rho_{\{V,W\}} \circ \rho_{\{U,V\}} = \rho_{\{U,W\}}$
3. Località: sezioni uguali localmente implica globalmente uguali
4. Incollamento: sezioni locali compatibili incollano a sezione globale

"""

# Verifica identità

for U in self.space.opens():

    for s in self.get\_sections(U):

        assert self.restrict(s, U, U) == s, "Identità fallita"

# Verifica composizionalità

for U in self.space.opens():

    for V in self.space.opens():

        if V.is\_subset\_of(U):

            for W in self.space.opens():

                if W.is\_subset\_of(V):

                    for s in self.get\_sections(U):

                        direct = self.restrict(s, U, W)

                        composed = self.restrict(

                            self.restrict(s, U, V), V, W

                        )

                        assert direct == composed, "Composizionalità fallita"

# Verifica località e incollamento (più complesso, su covering)

# ... implementazione dettagliata omessa per brevità

Per fasci semantici specifici, specializziamo implementando metodi `_compute_sections` e `_compute_restriction_map`:

```
class LexicalSheaf(DiscreteSheaf):
```

```
    """
```

```
    Fascio per parola polisemica, assegna interpretazioni a contesti
```

```
    """
```

```
    def __init__(self, space, word, interpretation_db):
```

```
        super().__init__(space)
```

```
        self.word = word
```

```
        self.interpretation_db = interpretation_db # Database interpretazioni
```

```
    def _compute_sections(self, U):
```

```
        """
```

```
        Per aperto U, ritorna interpretazioni di self.word valide in tutti contesti di U
```

```
        """
```

```
        # Inizia con tutte interpretazioni possibili
```

```
        all_interps = self.interpretation_db.get_interpretations(self.word)
```

```
        # Filtra a quelle compatibili con ogni contesto in U
```

```
        valid_interps = []
```

```
        for interp in all_interps:
```

```
            if all(self._is_compatible(interp, ctx) for ctx in U.contexts):
```

```
                valid_interps.append(interp)
```

```
        return valid_interps
```

```
    def _is_compatible(self, interpretation, context):
```

```
"""
```

```
Verifica se interpretazione è compatibile con contesto
```

```
Usa features contestuali e vincoli semantici
```

```
"""
```

```
# Esempio semplificato
```

```
if interpretation.domain == 'banking' and context.situation == 'bank':
```

```
    return True
```

```
if interpretation.domain == 'school' and context.situation == 'school':
```

```
    return True
```

```
return False
```

```
def _compute_restriction_map(self, U, V):
```

```
"""
```

```
Restrizione di interpretazioni da U a  $V \subseteq U$ 
```

```
Tipicamente identità (interpretazione non cambia) o specializzazione
```

```
"""
```

```
def restriction_func(interp):
```

```
    # Interpre
```

```
tazione si specializza su contesto più ristretto
```

```
    specialized = interp.copy()
```

```
    specialized.context_features = self._extract_features(V)
```

```
    return specialized
```

```
return restriction_func
```



## 24.4 Algoritmi di Calcolo Coomologico: Complessi di Čech e Algebra Lineare

Il calcolo dei gruppi di coomologia  $H^n(X, F)$  per fascio  $F$  su spazio discreto  $X_{\text{disc}}$  richiede costruire il complesso di Čech e calcolare nuclei/immagini di operatori cobordo.

### Algoritmo 3: Costruzione Complesso di Čech

Input: Fascio  $F$ , ricoprimento  $U = \{U_1, \dots, U_r\}$  di  $X$

Output: Complessi  $C^0, C^1, C^2, \dots$ , operatori  $\delta^0, \delta^1, \dots$

1. Costruisci  $C^0$  (0-cocatene):

$$C^0 = \text{Prodotto}_{\{i=1..r\}} F(U_i)$$

Elementi di  $C^0$  sono tuple  $(s_1, \dots, s_r)$  con  $s_i \in F(U_i)$

2. Costruisci  $C^1$  (1-cocatene):

$$C^1 = \text{Prodotto}_{\{i,j : U_i \cap U_j \neq \emptyset\}} F(U_i \cap U_j)$$

Elementi sono tuple  $(t_{\{ij\}})$  indicizzate da coppie con intersezione non vuota

3. Costruisci  $C^n$  per  $n \geq 2$ :

$$C^n = \text{Prodotto}_{\{i_0, \dots, i_n : U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} \neq \emptyset\}} F(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n})$$

4. Definisci operatore cobordo  $\delta^0: C^0 \rightarrow C^1$ :

Per 0-cocatena  $(s_i)$ :

$$(\delta^0 s)_{\{ij\}} = \rho_{\{U_i, U_i \cap U_j\}}(s_i) - \rho_{\{U_j, U_i \cap U_j\}}(s_j)$$

5. Definisci  $\delta^1: C^1 \rightarrow C^2$ :

Per 1-cocatena  $(t_{\{ij\}})$ :

$$(\delta^1 t)_{\{ijk\}} = t_{\{ij\}}|_{\{i \cap j \cap k\}} - t_{\{ik\}}|_{\{i \cap j \cap k\}} + t_{\{jk\}}|_{\{i \cap j \cap k\}}$$

6. Generalizza  $\delta^n: C^n \rightarrow C^{n+1}$  con formula alternata standard

Per fasci di gruppi abeliani (o moduli su anello), possiamo rappresentare cocatene come vettori e operatori cobordo come matrici sparse.

#### **Algoritmo 4: Calcolo $H^1$ via Algebra Lineare**

Input: Fascio abeliano  $F$ , ricoprimento  $U$

Output: Gruppo coomologia  $H^1(X, F)$

1. Costruisci matrice  $\delta^0: C^0 \rightarrow C^1$

Dimensioni:  $|C^1| \times |C^0|$

Ogni riga corrisponde a una coppia  $(i, j)$  con  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$

Ogni colonna corrisponde a un indice  $i$

Entrate:  $\delta^0[ij, i] = +p$  (restrizione da  $U_i$ )

$\delta^0[ij, j] = -p$  (restrizione da  $U_j$ , con segno opposto)

2. Calcola  $\text{Ker}(\delta^0) = Z^1$  (1-cocicli):

Usa eliminazione gaussiana o decomposizione SVD

$Z^1 = \{v \in C^1 : \delta^0 v = 0\}$

Complessità:  $O(|C^1|^2 \cdot |C^0|)$  per gauss standard

3. Calcola  $\text{Im}(\delta^0) = B^1$  (1-cobordi):

$\text{Im}(\delta^0) = \text{span}(\{\delta^0 e_i : i = 1..|C^0|\})$

Trovare base di  $\text{Im}(\delta^0)$  via eliminazione colonne

4. Calcola quoziente  $H^1 = Z^1 / B^1$ :

Metodo: trova base di  $Z^1$ , trova base di  $B^1$  come sottospazio di  $Z^1$

Base di  $H^1$  è complemento ortogonale

Complessità:  $O(|C^1|^3)$

5. Return  $H^1$  come gruppo abeliano (vettoriale) con base computata

L'implementazione in codice:

```
import numpy as np
```

```
from scipy.linalg import null_space, orth
```

```
def compute_H1_abelian(sheaf, covering):
```

```
    """
```

Calcola  $H^1(X, F)$  per fascio abeliano  $F$  con ricoprimento dato

Returns:

$H^1\_basis$ : matrice le cui colonne formano base di  $H^1$

$rank$ : rango di  $H^1$  (dimensione come spazio vettoriale)

```
    """
```

```
# Passo 1: Costruisci spazi  $C^0$ ,  $C^1$ 
```

```
C0_dimension = len(covering)
```

```
# Identifica intersezioni non vuote
```

```
pairs = []
```

```
for i in range(len(covering)):
```

```
    for j in range(i+1, len(covering)):
```

```
        if not covering[i].intersect(covering[j]).is_empty():
```

```
            pairs.append((i,j))
```

```
C1_dimension = len(pairs)
```

```

# Passo 2: Costruisci matrice  $\delta^0$ 

delta0 = np.zeros((C1_dimension, C0_dimension))

for idx, (i,j) in enumerate(pairs):

    # Restrizione da  $U_i$  contribuisce +1 (semplificato per gruppi abeliani)

    delta0[idx, i] = 1

    # Restrizione da  $U_j$  contribuisce -1

    delta0[idx, j] = -1


# Passo 3: Calcola  $\ker(\delta^0) = Z^1$ 

Z1_basis = null_space(delta0) # Colonne sono base di  $\ker$ 


# Passo 4: Calcola  $\text{Im}(\delta^0) = B^1$ 

B1_basis = orth(delta0) # Colonne sono base ortonormale di  $\text{Im}$ 


# Passo 5:  $H^1 = Z^1 / B^1$ 

# Trovare dimensione:  $\dim(Z^1) - \dim(B^1)$ 

rank_Z1 = Z1_basis.shape[1]

rank_B1 = B1_basis.shape[1]

rank_H1 = rank_Z1 - rank_B1


# Base di  $H^1$ : proiettare  $Z^1$  ortogonalmente a  $B^1$ 

if rank_B1 > 0:

    # Proiezione su complemento ortogonale di  $B^1$ 

    projection = np.eye(C1_dimension) - B1_basis @ B1_basis.T

```

```

H1_basis_prelim = projection @ Z1_basis

# Ortogonalizzare e normalizzare
H1_basis = orth(H1_basis_prelim)

else:

    H1_basis = Z1_basis

return H1_basis, rank_H1

```

Complessità:  $O(|C^1|^2 \cdot |C^0|)$  dominato da `null_space` che usa SVD con complessità  $O(\min(m,n)^2 \cdot \max(m,n))$  per matrice  $m \times n$ .

## 24.5 Ottimizzazioni e Strutture Sparse

Per fasci semantici su grandi spazi contestuali ( $k = 1000+$  prototipi), le matrici cobordo diventano estremamente grandi ma tipicamente molto sparse (la maggior parte delle intersezioni  $U_i \cap U_j$  sono vuote). Sfruttiamo questa sparsità:

```

from scipy.sparse import lil_matrix, csr_matrix

from scipy.sparse.linalg import svds

def compute_H1_sparse(sheaf, covering):
    """
    Versione ottimizzata per grandi spazi con matrici sparse
    """
    C0_dim = len(covering)

    # Costruisci pairs solo per intersezioni non vuote
    pairs = [(i,j) for i in range(len(covering))
              for j in range(i+1, len(covering))

```

```

    if not covering[i].intersect(covering[j]).is_empty()

C1_dim = len(pairs)

# Matrice sparsa (List of Lists format per costruzione efficiente)
delta0 = lil_matrix((C1_dim, C0_dim))

for idx, (i,j) in enumerate(pairs):
    delta0[idx, i] = 1
    delta0[idx, j] = -1

# Converti a Compressed Sparse Row per operazioni efficienti
delta0 = csr_matrix(delta0)

# Calcola SVD sparsa (molto più efficiente per matrici grandi sparse)
# svds calcola solo k valori singolari più grandi
k_svd = min(C1_dim, C0_dim, 100) # Limita per efficienza

try:
    U_svd, s_svd, Vt_svd = svds(delta0, k=k_svd)
except:
    # Fallback a metodo denso se SVD sparsa fallisce
    return compute_H1_abelian(sheaf, covering)

# Rank di delta0 = numero valori singolari > soglia
tol = 1e-10

```

```

rank_delta0 = np.sum(s_svd > tol)

# dim(ker) = C0_dim - rank(delta0)
dim_ker = C0_dim - rank_delta0

# dim(Im) = rank(delta0)
dim_im = rank_delta0

# rank(H^1) = dim(ker) - dim(Im intersect ker di delta1)

# Per semplificazione, assumiamo  $\text{Im}(\text{delta0}) \subseteq \text{ker}(\text{delta1})$  (vero per complessi)
rank_H1 = dim_ker - dim_im

return rank_H1 # Ritorna solo rango per efficienza

```

Complessità:  $O(\text{nnz}(\delta^0) \cdot k)$  dove  $\text{nnz}$  è numero entrate non zero (tipicamente  $O(|C^1|)$  se matrice sparsa) e  $k$  è numero valori singolari calcolati. Con  $k$  fisso piccolo, complessità è lineare nella dimensione invece di cubica.

## 24.6 Algoritmi di Inferenza Semantica su Fasci

Date rappresentazioni discrete di fasci semantici, possiamo implementare algoritmi di inferenza per compiti linguistici pratici:

### Task 1: Disambiguazione Contestuale

Input: Espressione ambigua  $e$ , contesto  $c$  Output: Interpretazione ottimale  $i^*$  di  $e$  in  $c$

```
def contextual_disambiguation(expression, context, sheaf):
```

```
    """
```

```
    Trova interpretazione di expression che massimizza pertinenza in context
```

```
    """
```

```
    # Identifica quale aperto U contiene context
```

```

containing_opens = [U for U in sheaf.space.opens()
                     if context in U.contexts]

# Scegli aperto più piccolo (più specifico) contenente context
U_optimal = min(containing_opens, key=lambda U: len(U.contexts))

# Recupera sezioni (interpretazioni) su U_optimal
interpretations = sheaf.get_sections(U_optimal)

# Scoring per rilevanza contestuale
scores = []

for interp in interpretations:
    score = compute_relevance(interp, context)
    scores.append((interp, score))

# Ritorna interpretazione con score massimo
best_interp, best_score = max(scores, key=lambda x: x[1])

return best_interp

def compute_relevance(interpretation, context):
    """
    Misura pertinenza = effetti_cognitivi / sforzo_elaborazione
    """
    effects = count_cognitive_effects(interpretation, context)
    effort = measure_processing_effort(interpretation, context)

```



```
return effects / (effort + 1e-6) # Evita divisione per zero
```

## Task 2: Rilevamento Ambiguità Irrisolubile

```
def detect_unresolvable_ambiguity(expression, context, sheaf, covering):
```

```
    """
```

```
    Verifica se esistono ostruzioni coomologiche  $H^1 \neq 0$  che impediscono
    risoluzione univoca dell'ambiguità
```

```
    """
```

```
    # Calcola  $H^1$  per il fascio su covering rilevante
```

```
    H1_basis, rank_H1 = compute_H1_abelian(sheaf, covering)
```

```
    if rank_H1 > 0:
```

```
        # Ostruzioni presenti: ambiguità irrisolvibile
```

```
        return True, rank_H1 # Ritorna anche "grado" di ambiguità
```

```
    else:
```

```
        # No ostruzioni: ambiguità risolvibile (se le sezioni locali esistono)
```

```
        return False, 0
```

## Task 3: Propagazione Contestuale e Incollamento

```
def propagate_interpretation(local_interps, covering, sheaf):
```

```
    """
```

```
    Data famiglia di interpretazioni locali su covering,
```

```
    tenta di incollarle in interpretazione globale
```

```
    Input:
```

local\_interps: dict {U\_i: interpretation\_i}  
 covering: lista aperti che coprono spazio  
 sheaf: fascio semantico

Output:

```

    global_interp se incollamento riesce, None altrimenti
    """

# Verifica compatibilità sulle sovrapposizioni
compatible = True
for i, U_i in enumerate(covering):
    for j, U_j in enumerate(covering):
        if i < j:
            intersection = U_i.intersect(U_j)
            if not intersection.is_empty():
                # Restrizioni devono coincidere
                restr_i = sheaf.restrict(local_interps[U_i], U_i, intersection)
                restr_j = sheaf.restrict(local_interps[U_j], U_j, intersection)

                if not interpretations_equal(restr_i, restr_j):
                    compatible = False
                    break
            if not compatible:
                break

    if not compatible:
        return None # Incollamento fallisce

```

```

# Costruisci interpretazione globale

# Unione degli aperti

union = covering[0]

for U in covering[1:]:

    union = union.union(U)

# Interpretazione globale deve coincidere con local_interps su ogni pezzo

global_interp = merge_compatible_interpretations(local_interps, covering)

return global_interp

```

## 24.7 Analisi di Complessità Computazionale: Limiti Teorici e Trattabilità Pratica

Analizziamo formalmente la complessità computazionale dei problemi fondamentali nella teoria dei fasci semantici discretizzati.

**Problema 1: SECTION-EXISTENCE** Input: Fascio  $F$ , aperto  $U$ , covering  $\{U_i\}$  Output: Esiste sezione globale  $s \in F(U)$ ?

Teorema: SECTION-EXISTENCE è NP-completo in generale.

Dimostrazione (sketch): Riduciamo SAT a SECTION-EXISTENCE. Data formula CNF  $\varphi$  con variabili  $\{x_1, \dots, x_n\}$  e clausole  $\{c_1, \dots, c_m\}$ , costruiamo fascio  $F$  dove:

- Spazio base  $X$  ha  $2n$  punti (assegnamenti parziali di variabili)
- Aperti corrispondono a sottoinsiemi consistenti di assegnamenti
- $F(U)$  contiene assegnamenti completi compatibili con  $U$
- $F$  ha sezione globale  $\Leftrightarrow \varphi$  è soddisfacibile

Conseguenza: Problemi di disambiguazione semantica che richiedono verificare esistenza di interpretazioni globali coerenti sono intrattabilmente difficili nel caso peggiore.

**Problema 2: H1-COMPUTATION** Input: Fascio abeliano  $F$ , covering  $U$   
Output: Gruppo  $H^1(X, F)$

Teorema: H1-COMPUTATION è polinomiale per fasci di dimensione finita su spazi discreti finiti.

Complessità:  $O(|U|^4 \cdot d^3)$  dove  $|U|$  è numero aperti nel covering e  $d$  è dimensione massima degli spazi  $F(U_i)$ .

Dimostrazione: La costruzione del complesso di Čech richiede enumerare intersezioni multiple di aperti (al più  $|U|^3$  triple), ciascuna richiede  $O(|U|)$  verifiche di inclusione. Matrici cobordo hanno dimensione al più  $O(|U|^2 \cdot d)$ . Algebra lineare (SVD, null space) richiede  $O((|U|^2 d)^3) = O(|U|^6 d^3)$ , ma ottimizzazioni sparse riducono a  $O(|U|^4 d^3)$ .

**Problema 3: OPTIMAL-DISAMBIGUATION** Input: Espressione  $e$ , contesto  $c$ , funzione pertinenza  $R$  Output: Interpretazione  $i^*$  che massimizza  $R(i, c)$

Complessità:  $O(|\text{interpretations}| \cdot T_R)$  dove  $T_R$  è costo valutare pertinenza.

Se spazio interpretazioni è esponenziale in lunghezza di  $e$  (per ambiguità composizionali), problema diventa esponenziale. Approssimazioni beam-search o greedy riducono a polinomiale con garanzie di qualità parziali.

## Capitolo 25: Semantica Vero-Condizionale Dinamica - Dynamic Predicate Logic, Update Semantics e Cambiamento di Stato attraverso Fasci

### 25.1 Oltre la Semantica Statica: Il Paradigma Dinamico e le Sue Motivazioni Empiriche

La semantica formale classica, nella tradizione montaguiana e nella semantica modelloteorica standard che ha dominato la filosofia del linguaggio e la linguistica formale per gran parte del ventesimo secolo, concepisce il significato di un'espressione linguistica come entità statica, atemporale, immutabile: una funzione che mappa situazioni o mondi possibili a valori di verità, estensioni, o proposizioni. In questo paradigma statico, il significato di una frase come "Giovanni fuma" è specificato attraverso condizioni di verità: un insieme di mondi possibili dove la proposizione espressa è vera, o equivalentemente, una funzione caratteristica che assegna vero o falso a ogni mondo a seconda che Giovanni abbia la proprietà di fumare in quel mondo.

Questo approccio statico, per quanto matematicamente elegante e formalmente rigoroso, incontra difficoltà sistematiche nell'confrontarsi con fenomeni linguistici dinamici dove il significato sembra intrinsecamente legato non solo a rappresentare stati di cose ma a trasformare, modificare, aggiornare lo stato informativo del discorso. Tre classi di fenomeni empirici hanno motivato storicamente lo sviluppo di semantiche dinamiche come alternative o complementi alla semantica statica tradizionale.

Prima, l'anafora cross-sentenziale e la dipendenza contestuale tra frasi successive nel discorso. Consideriamo la sequenza:

"Un uomo entrò nel bar. Lui ordinò una birra."

Il pronome "lui" nella seconda frase è anaforicamente dipendente dall'indefinito "un uomo" nella prima frase. Nella semantica classica, questo fenomeno è problematico perché le due frasi sono valutate indipendentemente: ciascuna frase ha le sue condizioni di verità che non fanno riferimento esplicito a informazione stabilita in frasi precedenti. La prima frase introduce un quantificatore esistenziale il cui scope è limitato sintatticamente a quella frase, quindi il referente introdotto non dovrebbe essere accessibile nella seconda frase. Eppure, empiricamente, l'anafora funziona perfettamente e i parlanti nativi comprendono senza difficoltà che "lui" si riferisce all'uomo introdotto nella prima frase.

Secondo, le donkey sentences e i fenomeni di binding dinamico che abbiamo discusso precedentemente. Frasi come "Ogni contadino che possiede un asino lo batte" presentano configurazioni sintattiche dove un indefinito nel restrictor di un quantificatore universale lega un pronome nel nuclear scope, violando le previsioni della semantica classica sui domini di quantificazione e binding.

Terzo, gli effetti contestuali cumulativi e la natura sequenziale intrinseca del processamento del discorso. Quando processiamo un testo composto da molteplici frasi, l'interpretazione di ciascuna frase dipende criticamente dallo stato informativo costruito processando le frasi precedenti. Questo stato include non solo il contenuto proposizionale esplicito asserito precedentemente, ma anche i referenti discorsivi introdotti, le presupposizioni accumulate, le aspettative pragmatiche generate, il common ground progressivamente arricchito. La semantica statica, trattando ciascuna frase isolatamente, non cattura naturalmente questa dipendenza sequenziale e questo accumulo informativo progressivo.

Il paradigma dinamico propone una revisione radicale della nozione stessa di significato linguistico. Il significato di una frase non è più concepito primariamente come rappresentazione statica di condizioni di verità, ma come potenziale di cambiamento contestuale (context change potential): una funzione o operazione che trasforma lo stato contestuale di input in uno stato contestuale di output. Formalmente, se  $C$  è lo spazio degli stati contestuali possibili, il significato dinamico di una frase  $\varphi$  è una funzione:

$$[[\varphi]] : C \rightarrow C$$

che mappa stati contestuali a stati contestuali. Interpretare  $\varphi$  in uno stato contestuale  $c$  consiste nell'applicare questa funzione di aggiornamento ottenendo un nuovo stato  $c' = [[\varphi]](c)$ . Il significato è azione, trasformazione, cambiamento piuttosto che descrizione statica.

Questa prospettiva dinamica è stata sviluppata attraverso diversi formalismi complementari che esploreremo sistematicamente in questo capitolo. La Discourse Representation Theory (DRT) di Hans Kamp, sviluppata negli anni Ottanta, modella il discorso attraverso strutture rappresentazionali (DRS) che sono costruite e aggiornate incrementalmente man mano che il discorso procede. La Dynamic Predicate Logic (DPL) di Jeroen Groenendijk e Martin Stokhof fornisce una ricostruzione logica formale del paradigma dinamico, reinterpretando

connettivi logici standard e quantificatori come operatori dinamici che modificano stati informativi. L'Update Semantics di Frank Veltman modella il significato come operazioni di aggiornamento su stati epistemicamente rappresentati come insiemi di mondi possibili.

Integreremo questi approcci dinamici nel framework dei fasci semantici, mostrando come la teoria dei fasci fornisca una generalizzazione naturale e matematicamente rigorosa della semantica dinamica. Gli stati contestuali diventano punti in uno spazio topologico  $C$ , i significati dinamici diventano sezioni di fasci di trasformazioni, e le operazioni di aggiornamento diventano morfismi tra fasci di stati.

## 25.2 Dynamic Predicate Logic (DPL): Ricostruzione Formale del Paradigma Dinamico

La Dynamic Predicate Logic, introdotta da Groenendijk e Stokhof nel loro articolo seminale del 1991 "Dynamic Predicate Logic", fornisce una ricostruzione sistematica e formalmente rigorosa della semantica dinamica mantenendo sintassi vicina a quella della logica del primo ordine classica ma reinterpretando radicalmente la semantica.

Nella DPL, uno stato informativo (o assignment) è una funzione  $g$  che assegna a ciascuna variabile  $x$  un individuo  $g(x)$  dal dominio  $D$  di entità. L'insieme di tutti gli assignment è  $G = D^{\text{Var}}$ , il prodotto cartesiano di copie di  $D$  indicizzate dalle variabili. Una formula  $\varphi$  non denota più un insieme di mondi o una condizione di verità statica, ma denota una relazione binaria  $R_\varphi \subseteq G \times G$  tra assignment:  $R_\varphi$  contiene coppie  $(g, h)$  tali che interpretare  $\varphi$  nell'assignment  $g$  produce come output l'assignment  $h$ .

Formalmente, il significato dinamico di una formula  $\varphi$  è definito induttivamente sulla struttura sintattica:

**Formule Atomiche:** Per predicato atomico  $P(t_1, \dots, t_n)$  dove  $t_i$  sono termini, il significato dinamico è:

$$\llbracket P(t_1, \dots, t_n) \rrbracket = \{(g, g) : (g(t_1), \dots, g(t_n)) \in I(P)\}$$

dove  $I(P)$  è l'interpretazione classica di  $P$  come relazione  $n$ -aria su  $D$ . Notare che l'output assignment è identico all'input: i predicati atomici testano condizioni ma non modificano l'assignment. Questo cattura l'intuizione che asserzioni atomiche verificano fatti senza introdurre nuovi referenti.

**Negazione:** La negazione è interpretata come test che l'esecuzione della formula negata fallirebbe:

$$\llbracket \neg\varphi \rrbracket = \{(g, g) : \nexists h[(g, h) \in \llbracket \varphi \rrbracket]\}$$

Negare  $\varphi$  testa che non esista alcun assignment  $h$  raggiungibile da  $g$  interpretando  $\varphi$ . Come i predicati atomici, la negazione non modifica l'assignment ma solo testa condizioni. Crucialmente, la negazione non permette a binding di "sfuggire": se  $\varphi$  introduce nuove variabili, queste non sono accessibili dopo  $\neg\varphi$ .

**Congiunzione:** La congiunzione è interpretata come composizione sequenziale relazionale:

$$\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket = \{(g, h) : \exists k[(g, k) \in \llbracket \varphi \rrbracket \wedge (k, h) \in \llbracket \psi \rrbracket]\}$$

Interpretare  $\varphi \wedge \psi$  significa prima interpretare  $\varphi$  con input  $g$  producendo qualche output intermedio  $k$ , poi interpretare  $\psi$  con input  $k$  producendo output finale  $h$ . La composizione relazionale cattura l'idea di esecuzione sequenziale: il contesto modificato dalla prima congiuntura diventa l'input per la seconda congiuntura. Questo permette alla seconda congiuntura di "vedere" i binding stabiliti dalla prima.

**Disgiunzione:** La disgiunzione è interpretata come unione di relazioni:

$$\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \cup \llbracket \psi \rrbracket$$

Interpretare  $\varphi \vee \psi$  significa eseguire  $\varphi$  o eseguire  $\psi$  (scelta non deterministica). Entrambi i percorsi sono possibili, e l'unione cattura che qualunque transizione permessa da  $\varphi$  o da  $\psi$  è permessa dalla disgiunzione.

**Implicazione:** L'implicazione materiale è definita attraverso negazione e disgiunzione:

$$\llbracket \varphi \rightarrow \psi \rrbracket = \llbracket \neg \varphi \vee \psi \rrbracket = \{(g, h) : (\forall k[(g, k) \notin \llbracket \varphi \rrbracket]) \vee (\exists k[(g, k) \in \llbracket \varphi \rrbracket \wedge (k, h) \in \llbracket \psi \rrbracket])\}$$

Questo può essere semplificato come: o  $\varphi$  fallisce (non c'è transizione possibile), oppure  $\varphi$  riesce producendo qualche  $k$  e allora  $\psi$  deve riuscire da  $k$ .

**Quantificazione Esistenziale:** Il quantificatore esistenziale introduce referente discorsivo:

$$\llbracket \exists x \varphi \rrbracket = \{(g, h) : \exists d \in D[(g[x:=d], h) \in \llbracket \varphi \rrbracket]\}$$

dove  $g[x:=d]$  è l'assignment identico a  $g$  eccetto che assegna  $d$  a  $x$ . Eseguire  $\exists x \varphi$  significa scegliere arbitrariamente un individuo  $d$  dal dominio, aggiornare l'assignment assegnando  $d$  a  $x$ , e poi eseguire  $\varphi$  con questo assignment modificato. Crucialmente, il binding di  $x$  persiste nell'output  $h$ : se  $\varphi$  non riassegna  $x$ , allora  $h(x) = d$ . Questo permette a variabili legate esistenzialmente di essere accessibili per binding successivo, risolvendo il problema dell'anafora.

**Quantificazione Universale:** Il quantificatore universale è definito attraverso negazione e esistenziale:

$$\llbracket \forall x \varphi \rrbracket = \llbracket \neg \exists x \neg \varphi \rrbracket$$

Questo testa che per ogni individuo  $d$ , se aggiorniamo  $x$  con  $d$ , l'esecuzione di  $\varphi$  deve riuscire. Come la negazione,  $\forall x$  non permette a binding di  $x$  di sfuggire dal suo scope.

**Teorema Fondamentale (Groenendijk & Stokhof):** La DPL conserva le equivalenze logiche classiche che non coinvolgono scope di binding, ma rivisa quelle che lo coinvolgono. Per esempio:

- $\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \equiv (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$  (associatività congiunzione preservata)
- $\varphi \wedge \psi \neq \psi \wedge \varphi$  in generale (commutatività perduta!)

- $\exists x \varphi \wedge \psi \neq \exists x (\varphi \wedge \psi)$  se  $\psi$  contiene  $x$  libera

L'ultima non-equivalenza è cruciale:  $\exists x$  può legare variabili in formule successive al di fuori del suo scope sintattico, permettendo binding dinamico.

## 25.3 Modellazione di DPL attraverso Fasci di Relazioni su Spazi di Assignment

Integriamo ora DPL nel framework dei fasci topologici. Definiamo uno spazio topologico  $G$  di assignment parziali, dotato di topologia che riflette relazioni di estensione e compatibilità tra assignment.

Un assignment parziale  $g$  è una funzione parziale  $\text{Var} \rightarrow D$  che assegna valori solo a un sottoinsieme  $\text{dom}(g) \subseteq \text{Var}$  di variabili. Lo spazio completo è:

$$G = \bigcup_{X \subseteq \text{Var}} D^X$$

l'unione disgiunta su tutti i sottoinsiemi finiti  $X$  di variabili degli spazi di assignment completi su  $X$ . Ogni punto  $g \in G$  specifica un assignment parziale con dominio finito.

La topologia su  $G$  è generata da una base costituita da insiemi della forma:

$$B_{\{X,v\}} = \{g \in G : \text{dom}(g) = X \wedge g|_Y = v \text{ per } Y \subseteq X\}$$

dove  $v$  è un assignment completo su  $Y$ . Questi aperti base rappresentano "regioni di assignment con estensione comune  $v$  su  $Y$ ".

Definiamo fasci di relazioni dinamiche  $F_{\text{dyn}}$  che assegnano a ogni aperto  $U \subseteq G$  l'insieme delle relazioni dinamiche (transizioni ammissibili) tra assignment in  $U$ :

$$F_{\text{dyn}}(U) = \{R \subseteq U \times U : R \text{ soddisfa vincoli di locality e compatibilità}\}$$

Una relazione  $R \in F_{\text{dyn}}(U)$  rappresenta possibili transizioni tra stati in  $U$  indotte dall'interpretazione di qualche formula. I vincoli di locality richiedono che transizioni non modifichino arbitrariamente assignment ma solo estendano o testino compatibilità.

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{dyn}}(U) \rightarrow F_{\text{dyn}}(V)$  per  $V \subseteq U$  operano restringendo relazioni:

$$\rho_{\{U,V\}}(R) = R \cap (V \times V)$$

Ogni formula  $\varphi$  della DPL induce una sezione globale  $s_{\varphi} \in F_{\text{dyn}}(G)$ :

$$s_{\varphi}(g) = \{h : (g,h) \in \llbracket \varphi \rrbracket_{\text{DPL}}\}$$

Questa sezione assegna a ogni assignment  $g$  l'insieme degli assignment  $h$  raggiungibili interpretando  $\varphi$ .

Le operazioni logiche diventano operazioni su sezioni del fascio:



**Congiunzione come Composizione:** Se  $\varphi$  e  $\psi$  hanno sezioni  $s_\varphi$  e  $s_\psi$ , allora  $\varphi \wedge \psi$  ha sezione:

$$s_{\{\varphi \wedge \psi\}}(g) = \{h : \exists k[k \in s_\varphi(g) \wedge h \in s_\psi(k)]\}$$

Questa è esattamente la composizione relazionale. Topologicamente, componiamo trasformazioni: prima  $\varphi$  mappa  $g$  a regione  $s_\varphi(g)$ , poi per ogni  $k$  in questa regione,  $\psi$  mappa  $k$  a  $s_\psi(k)$ , e l'unione di tutte queste regioni finali è  $s_{\{\varphi \wedge \psi\}}(g)$ .

**Quantificazione come Proiezione:** La quantificazione esistenziale  $\exists x$  corrisponde topologicamente a una proiezione che dimentica la coordinata  $x$ . Se  $g$  è assignment su variabili  $V \cup \{x\}$ , la proiezione  $\pi_x: G_{V \cup \{x\}} \rightarrow G_V$  "dimentica" il valore di  $x$ .

Il significato di  $\exists x \varphi$  è ottenuto:

1. Sollevando (lifting) l'assignment  $g$  a tutti i possibili  $g[x:=d]$
2. Applicando  $\varphi$  a ciascuno
3. Proiettando via  $x$  dai risultati

Formalmente, il fascio della quantificazione è l'immagine diretta (pushforward) del fascio di  $\varphi$  lungo la proiezione  $\pi_x$ .

## 25.4 Update Semantics: Stati Epistemici e Operazioni di Aggiornamento Informazionale

L'Update Semantics, sviluppata da Frank Veltman, si concentra esplicitamente sulla modellazione del cambiamento di stato epistemo. Uno stato epistemo è rappresentato come insieme  $\sigma \subseteq W$  di mondi possibili, dove  $W$  è l'insieme di tutti i mondi possibili. Un mondo  $w \in \sigma$  rappresenta una possibilità epistemicamente aperta: dato lo stato informativo codificato da  $\sigma$ ,  $w$  è compatibile con ciò che sappiamo.

Il significato di una frase  $\varphi$  è un'operazione di aggiornamento (update operation):

$$[[\varphi]] : P(W) \rightarrow P(W)$$

che mappa stati epistemici a stati epistemici aggiornati. Interpretare  $\varphi$  in stato  $\sigma$  produce stato aggiornato  $\sigma' = [[\varphi]](\sigma)$ . Il nuovo stato è tipicamente più informativo ( $\sigma' \subseteq \sigma$ ), riflettendo che nuova informazione è stata acquisita, eliminando mondi incompatibili.

**Aggiornamento per Asserzioni:** Per formula proposizionale semplice  $p$ , l'aggiornamento è intersezione:

$$[[p]](\sigma) = \sigma \cap [[p]]$$

dove  $[[p]] \subseteq W$  è l'insieme di mondi dove  $p$  è vera (semantica statica classica). Aggiornare con  $p$  elimina tutti i mondi dove  $p$  è falsa, restringendo  $\sigma$  ai mondi compatibili con  $p$ .

**Proprietà di Supporto:**  $\sigma$  supporta  $p$  (scritto  $\sigma \models p$ ) se e solo se  $\sigma \subseteq \llbracket p \rrbracket$ , ovvero tutti i mondi in  $\sigma$  rendono  $p$  vera. Equivalentemente,  $\sigma \models p \Leftrightarrow \llbracket p \rrbracket(\sigma) = \sigma$  (aggiornare con  $p$  non cambia stato, perché  $p$  è già implied).

**Test vs Update:** Veltman distingue tra:

- Test:  $\llbracket ?\phi \rrbracket(\sigma) = \sigma$  se  $\sigma \models \phi$ , altrimenti  $\emptyset$  (fallimento)
- Update:  $\llbracket !\phi \rrbracket(\sigma) = \llbracket \phi \rrbracket(\sigma)$  (modifica incondizionata)

Questa distinzione cattura differenza tra interrogare stato corrente (test) vs aggiungere nuova informazione (update).

**Composizione:** La composizione sequenziale di aggiornamenti è funzionalmente composta:

$$\llbracket \phi ; \psi \rrbracket(\sigma) = \llbracket \psi \rrbracket(\llbracket \phi \rrbracket(\sigma))$$

Prima aggiorniamo con  $\phi$ , poi aggiorniamo il risultato con  $\psi$ .

**Scelta Non Deterministica:** L'unione modella scelta:

$$\llbracket \phi + \psi \rrbracket(\sigma) = \llbracket \phi \rrbracket(\sigma) \cup \llbracket \psi \rrbracket(\sigma)$$

Aggiornare con  $\phi + \psi$  produce l'unione degli stati risultanti da aggiornamenti separati.

**Modalità:** Gli operatori modali might e must sono definiti:

$$\llbracket \text{might } \phi \rrbracket(\sigma) = \sigma \text{ se } \llbracket \phi \rrbracket(\sigma) \neq \emptyset, \text{ altrimenti } \emptyset \quad \llbracket \text{must } \phi \rrbracket(\sigma) = \sigma \text{ se } \llbracket \phi \rrbracket(\sigma) = \sigma, \text{ altrimenti } \emptyset$$

"might  $\phi$ " testa se  $\phi$  è compatibile con  $\sigma$  (esistono mondi in  $\sigma$  dove  $\phi$  è aggiornabile senza fallimento). "must  $\phi$ " testa se  $\phi$  è necessario dato  $\sigma$  (tutti i mondi in  $\sigma$  supportano  $\phi$ ).

## 25.5 Fasci di Stati Epistemic e Morfismi di Aggiornamento

Modelliamo Update Semantics attraverso fasci su spazi di contesti epistemic. Definiamo spazio  $E$  di stati epistemic parziali. Un punto  $e \in E$  è una coppia  $(\sigma, \text{Ctx})$  dove:

- $\sigma \subseteq W$  è l'insieme di mondi epistemicamente aperti
- $\text{Ctx}$  è contesto discorsivo (referenti introdotti, presupposizioni, etc.)

La topologia su  $E$  riflette relazioni di raffinamento informazionale:  $e_1$  è vicino a  $e_2$  se  $\sigma_1 \approx \sigma_2$  (sovrapposizione grande di mondi) e  $\text{Ctx}_1 \approx \text{Ctx}_2$  (contesti simili).

Il fascio degli stati epistemic  $F_{\text{state}}$  assegna:

$$F_{\text{state}}(U) = \{\text{distribuzioni } s: U \rightarrow P(W) \times \text{Contexts soddisfacenti coerenza locale}\}$$

Una sezione  $s \in F_{\text{state}}(U)$  specifica per ogni punto  $e \in U$  uno stato epistemic  $s(e) = (\sigma(e), \text{Ctx}(e))$ .

Gli aggiornamenti sono morfismi tra fasci di stati:

$$\varphi_{\text{update}}: F_{\text{state}} \rightarrow F_{\text{state}}$$

Per ogni aperto  $U$  e sezione  $s \in F_{\text{state}}(U)$ ,  $\varphi_{\text{update}}$  trasforma  $s$  in  $s'$  dove:

$$s'(e) = (\llbracket \varphi \rrbracket(\sigma(e)), \text{Ctx}'(e))$$

con  $\text{Ctx}'(e)$  aggiornato per riflettere cambiamenti indotti da  $\varphi$  (nuovi referenti, presupposizioni).

Le mappe di restrizione garantiscono che aggiornamenti si comportino coerentemente su sottoregioni:

$$\rho_{\{U,V\}}(\varphi_{\text{update}}(s)) = \varphi_{\text{update}}(\rho_{\{U,V\}}(s))$$

Aggiornare e poi restringere = restringere e poi aggiornare.

## 25.6 Dinamica Multi-Agente: Fasci su Prodotti di Spazi Epistemici

Quando molteplici agenti comunicano, ciascuno mantenendo stato epistemico proprio, la semantica dinamica deve generalizzare a configurazioni multi-agente. Definiamo:

$$E_{\text{multi}} = E_{A1} \times E_{A2} \times \dots \times E_{An}$$

il prodotto degli spazi epistemici individuali. Un punto  $e_{\text{multi}} \in E_{\text{multi}}$  specifica configurazione completa  $(e_1, \dots, e_n)$  dove  $e_i$  è stato epistemico di agente  $A_i$ .

Il fascio degli stati multi-agente:

$$F_{\text{state\_multi}}(U) = \{\text{configurazioni } (s_1, \dots, s_n) \text{ dove } s_i \in F_{\text{state}}(\pi_i(U))\}$$

con  $\pi_i: E_{\text{multi}} \rightarrow E_{A_i}$  proiezioni.

**Public Announcements:** Un annuncio pubblico di  $\varphi$  aggiorna tutti gli stati simultaneamente:

$$\varphi_{\text{public}}(e_1, \dots, e_n) = (\llbracket \varphi \rrbracket(e_1), \dots, \llbracket \varphi \rrbracket(e_n))$$

Questo è diagonale nel prodotto: tutti ricevono stessa informazione.

**Private Communications:** Una comunicazione privata da  $A_i$  a  $A_j$  aggiorna solo  $e_j$ :

$$\varphi_{\text{private\_i} \rightarrow j}(e_1, \dots, e_n) = (e_1, \dots, e_i, \dots, \llbracket \varphi \rrbracket(e_j), \dots, e_n)$$

Solo lo stato di  $A_j$  cambia; altri agenti non apprendono nulla.

Le mappe di restrizione nel fascio multi-agente propagano aggiornamenti coerentemente attraverso proiezioni sugli spazi individuali.

## 25.7 Trattamento Unificato di Anafora, Presupposizione e Implicatura in Semantica Dinamica Fasciata

La potenza del framework dinamico basato su fasci emerge nel trattamento unificato di fenomeni precedentemente trattati separatamente.

**Anafora:** I referenti discorsivi sono componenti degli stati contestuali. Un indefinito "un F" introduce referente x nel contesto:

$$[[\text{un F}]](\text{ctx}) = \text{ctx}' \text{ dove } \text{ctx}' = \text{ctx} \cup \{x: F(x)\}$$

Un pronome "lui/lei" risolve a referente nel contesto:

$$[[\text{lui}_i]](\text{ctx}) = \text{ctx} \text{ se } x_i \in \text{dom}(\text{ctx}) \text{ e } \text{gender}(x_i) = \text{maschile, altrimenti fallimento}$$

La risoluzione è modellata come restrizione: cercando nel fascio l'unico aperto contenente assignment compatibile.

**Presupposizione:** Le presupposizioni sono test dinamici. "Giovanni ha smesso di fumare" presuppone "Giovanni fumava":

$$[[\text{smesso}(\text{fumare}, \text{Giovanni})]](\text{ctx}) = \text{if } \text{ctx} \models \text{fumava}(\text{Giovanni}) \text{ then } \text{ctx}' \text{ con } \neg \text{fumava}(\text{Giovanni}) \text{ else FAILURE}$$

Se presupposizione non soddisfatta, aggiornamento fallisce. Il fascio della presupposizione è sotto-fascio rigido che si proietta attraverso operatori.

**Implicatura:** Le implicature sono arricchimenti contestuali derivati per massimizzazione pertinenza:

$[[\text{alcuni}]](\text{ctx})$  aggiorna con " $\exists x: F(x)$ " ma implica pragmaticamente " $\neg \forall x: F(x)$ " se contesto rende questa inferenza rilevante.

Il fascio  $F_{\text{implic}}$  cattura implicature come sezioni aggiuntive emergenti da interazione tra semantica esplicita e aspettative contestuali.

## 25.8 Sequenze Discorsive e Composizione di Aggiornamenti: Algebra delle Trasformazioni Contestuali

Un discorso  $D = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  è sequenza di frasi. L'interpretazione dinamica è composizione funzionale:

$$[[D]] = [[\phi_n]] \circ \dots \circ [[\phi_2]] \circ [[\phi_1]]$$

Applicata a stato iniziale  $\text{ctx}_0$ , produce:

$$[[D]](ctx0) = [[\varphi n]](\dots[[\varphi 2]]([[\varphi 1]](ctx0))\dots)$$

La composizione è associativa (proprietà fondamentale), permettendo computazione incrementale.

Nel framework fasciato, sequenze discorsive corrispondono a cammini nello spazio contestuale:

$$\gamma: [0, n] \rightarrow C \quad \gamma(0) = ctx0 \quad \gamma(i) = [[\varphi i]](\gamma(i-1)) \text{ per } i=1..n$$

Il cammino  $\gamma$  traccia l'evoluzione contestuale attraverso il discorso. Diversi discorsi con stesso contenuto proposizionale ma ordine diverso producono cammini diversi, catturando sensibilità all'ordine.

## 25.9 Indeterminazione Dinamica e Ostruzioni Coomologiche all'Aggiornamento Globale

Non tutti i discorsi producono aggiornamenti ben definiti globalmente. Ambiguità, contraddizioni, violazioni presupposizionali possono generare fallimenti.

Consideriamo discorso:

D1: "Un uomo entrò." D2: "Lui era alto."

D3: "Una donna entrò." D4: "Lei era bionda." D5: "Lui la salutò."

In D5, "lui" potrebbe riferirsi all'uomo (D1) o anaforicamente ambiguo. "La" si riferisce alla donna (D3). Ma l'ordine produce potenziale confusione: esistono assignment multipli compatibili localmente (D1-D2 compatibili, D3-D4 compatibili, D5 compatibile con entrambi se interpretiamo referenti correttamente) ma globalmente richiedono coordinazione.

Modelliamo con ricoprimento  $\{U_{D1D2}, U_{D3D4}, U_{D5}\}$  dove:

- $U_{D1D2}$ : stati compatibili con "uomo x alto"
- $U_{D3D4}$ : stati compatibili con "donna y bionda"
- $U_{D5}$ : stati compatibili con "x salutò y"

Sezioni locali:

- $s_{12} \in F(U_{D1D2})$ : introduce x
- $s_{34} \in F(U_{D3D4})$ : introduce y
- $s_5 \in F(U_{D5})$ : richiede x, y disponibili

Per incollamento, dobbiamo verificare compatibilità sulle intersezioni. Se  $U_{D1D2} \cap U_{D5} \neq \emptyset$ , allora  $s_{12}$  e  $s_5$  devono concordare sul valore di x. Similmente per y.

Se concordano, incollamento riesce producendo interpretazione globale coerente. Se divergono (ambiguità su referenti), il cobordo  $\delta^0(s_{12}, s_{34}, s_5)$  è non zero, generando ostruzione in  $H^1$ .

La presenza di  $H^1 \neq 0$  segnala che il discorso è semanticamente ambiguo o incoerente: non esiste singola interpretazione globale che estende coerentemente tutte le interpretazioni locali.

## 25.10 Implementazione Computazionale: Sistema di Update Dinamico Basato su Fasci

Concludiamo con architettura implementativa per sistema di interpretazione dinamica:

```
class DynamicUpdateSystem:
```

```
    """
```

```
    Sistema per interpretazione dinamica di discorsi usando fasci di stati
```

```
    """
```

```
    def __init__(self):
```

```
        self.context_space = EpistemicStateSpace()
```

```
        self.current_state = self.context_space.initial_state()
```

```
        self.discourse_history = []
```

```
    def process_sentence(self, sentence):
```

```
        """
```

```
        Processa singola frase, aggiornando stato contestuale
```

```
        """
```

```
        # Parse a formula logica
```

```
        formula = self.parse_to_formula(sentence)
```

```
        # Calcola aggiornamento dinamico
```

```
        update_op = self.compute_update_operator(formula)
```

```
        # Applica a stato corrente
```

```
try:
```

```
    new_state = update_op(self.current_state)
```

```
    # Successo: aggiorna stato
```

```
    self.current_state = new_state
```

```
    self.discourse_history.append((sentence, formula, new_state))
```

```
    return {'status': 'success', 'new_state': new_state}
```

```
except UpdateFailure as e:
```

```
    # Fallimento: presupposizione violata o incompatibilità
```

```
    return {'status': 'failure', 'reason': str(e)}
```

```
def compute_update_operator(self, formula):
```

```
    """
```

```
    Dato formula  $\varphi$ , ritorna operatore  $[[\varphi]]: \text{States} \rightarrow \text{States}$ 
```

```
    """
```

```
    if formula.type == 'atomic':
```

```
        # Predicato atomico: test condizione
```

```
        return lambda s: s if self.test_atomic(formula, s) else UpdateFailure()
```

```
    elif formula.type == 'exists':
```

```
        #  $\exists x \varphi$ : introduce referente, aggiorna con  $\varphi$ 
```

```
        var = formula.variable
```

```
        body = formula.body
```

```

def exists_update(state):

    # Scegli nuovo individuo dal dominio

    new_individual = state.domain.choose_fresh()

    # Estendi assignment

    extended_state = state.extend({var: new_individual})

    # Aggiorna con corpo

    body_op = self.compute_update_operator(body)

    return body_op(extended_state)

return exists_update

elif formula.type == 'conjunction':

    #  $\varphi \wedge \psi$ : composizione sequenziale

    phi = formula.left

    psi = formula.right

    phi_op = self.compute_update_operator(phi)

    psi_op = self.compute_update_operator(psi)

    return lambda s: psi_op(phi_op(s)) # Composizione

elif formula.type == 'negation':

    #  $\neg\varphi$ : test che  $\varphi$  fallisce

    phi = formula.inner

```



```
phi_op = self.compute_update_operator(phi)
```

```
def negation_update(state):
```

```
    try:
```

```
        phi_op(state)
```

```
        # Se riesce, negazione fallisce
```

```
        raise UpdateFailure("Negation: inner succeeded")
```

```
    except UpdateFailure:
```

```
        # Se fallisce, negazione riesce (senza modificare stato)
```

```
        return state
```

```
    return negation_update
```

```
# ... altri casi
```

```
def process_discourse(self, sentences):
```

```
    """
```

```
    Processa sequenza di frasi
```

```
    """
```

```
    results = []
```

```
    for sent in sentences:
```

```
        result = self.process_sentence(sent)
```

```
        results.append(result)
```

```
    if result['status'] == 'failure':
```

```

        # Discorso incoerente

        break

    return {

        'final_state': self.current_state,

        'history': self.discourse_history,

        'results': results

    }

```

Questo sistema implementa interpretazione incrementale: ciascuna frase aggiorna stato accumulato, permettendo binding dinamico e dipendenze anaforiche cross-sentenziali.

## 25.11 Conclusione: Semantica Dinamica come Geometria del Cambiamento Informazionale

La semantica dinamica, vista attraverso la lente della teoria dei fasci, rivela la sua profonda struttura geometrica. Gli stati contestuali formano uno spazio topologico dove vicinanza riflette similarità informazionale. I significati sono non descrizioni statiche ma trasformazioni: morfismi, cammini, flussi in questo spazio. La composizione sequenziale è naturale composizione categoriale. Le condizioni di fascio garantiscono coerenza locale-globale degli aggiornamenti.

Questo approccio unifica fenomeni precedentemente frammentati - anafora, presupposizione, implicatura, modalità - sotto principio comune: il significato è azione di trasformazione dello stato informazionale, vincolata da topologia dello spazio contestuale e algebra delle trasformazioni compatibili.

La teoria fornisce inoltre strumenti computazionali: algoritmi per computare aggiornamenti, rilevare incoerenze, tracciare dipendenze. Ostruzioni coomologiche quantificano impossibilità di interpretazioni globali coerenti, fornendo misura matematica dell'ambiguità discorsiva.

Prospettive future includono estensioni a semantiche probabilistiche (distribuzioni su stati piuttosto che stati singoli), dinamiche temporali continue (equazioni differenziali su spazi contestuali), e integrazioni con architetture neurali deep learning per apprendere operatori di aggiornamento da corpora.

La semantica dinamica fasciata apre nuove direzioni per comprendere, modellare e computare il significato linguistico in tutta la sua ricchezza dinamica, contestuale, e compositiva.

## Capitolo 26: Fenomeni di Confine - Code-Switching, Prestiti Linguistici e Creolizzazione nella Teoria dei Fasci

### 26.1 Introduzione ai Fenomeni di Confine: Spazi Linguistici Multipli e Topologie Ibride

I fenomeni linguistici che si manifestano ai confini tra sistemi linguistici diversi, alle intersezioni di lingue, dialetti, registri e codici comunicativi eterogenei, rappresentano una sfida teorica profonda e affascinante per qualunque framework semantico che ambisca alla completezza descrittiva ed esplicativa. Questi fenomeni di confine, di cui il code-switching (alternanza di codice), i prestiti linguistici, il contatto linguistico prolungato e la creolizzazione costituiscono manifestazioni paradigmatiche, sollevano interrogativi fondamentali sulla natura stessa del significato, sulla delimitazione dei sistemi linguistici, sulla modularità o integrazione delle competenze linguistiche multiple, e sulla dinamica evolutiva delle lingue in contatto.

La teoria dei fasci semantici, con la sua architettura matematica sofisticata basata su spazi topologici contestuali e assegnazioni locali coerenti di interpretazioni, offre strumenti concettuali e formali particolarmente adatti, forse uniquely suited, per modellare questi fenomeni complessi che resistono tenacemente alle trattazioni tradizionali. L'idea centrale, il cuore concettuale della nostra proposta, è che i parlanti bilingui o plurilingui non operano con spazi contestuali separati e disgiunti per ciascuna lingua, come se le lingue fossero compartimenti stagni nella mente, ma piuttosto abitano uno spazio contestuale unificato ma strutturalmente ricco, topologicamente complesso, che integra molteplici dimensioni linguistiche simultaneamente, permettendo transizioni continue, ibridazioni, sovrapposizioni e interferenze tra sistemi che mantengono comunque una certa identità e coerenza interna.

Formalizziamo questa intuizione costruendo spazi topologici prodotto o somme fibrato che incorporano componenti linguistiche multiple. Sia  $L = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$  un insieme di lingue o varietà linguistiche disponibili per un parlante o una comunità. Invece di modellare ciascuna lingua  $L_i$  con uno spazio contestuale separato  $X_i$ , completamente disconnesso dagli altri, definiamo uno spazio contestuale globale unificato:

$$X_{\text{multilingue}} = X_{\text{situazionale}} \times X_{\text{sociale}} \times X_{\text{culturale}} \times X_{\text{linguistico\_multiplo}}$$

dove  $X_{\text{linguistico\_multiplo}}$  non è una semplice disgiunzione  $\sqcup_i X_i$  (che implicherebbe separazione completa), ma piuttosto una struttura più raffinata che permette sovrapposizioni, transizioni graduali, zone di contatto e ibridazione. Potremmo modellare  $X_{\text{linguistico\_multiplo}}$  come uno spazio fibrato  $\pi: E \rightarrow B$  dove:

- La base  $B$  è uno spazio di "configurazioni sociolinguistiche" che specificano quali lingue sono attive, salienti, o disponibili in un dato contesto sociale
- La fibra  $\pi^{-1}(b)$  sopra un punto  $b \in B$  è lo spazio delle possibili realizzazioni linguistiche compatibili con quella configurazione sociolinguistica

Questa struttura fibrata cattura l'idea che la scelta linguistica (quale lingua usare, se alternare, se mescolare) non è arbitraria ma dipende sistematicamente da fattori sociali, situazionali e identitari codificati nella base  $B$ , mentre all'interno di una configurazione sociolinguistica fissata, il parlante ha ancora gradi di libertà su come realizzare linguisticamente il messaggio, libertà rappresentata dalla fibra.

La topologia su  $X_{\text{multilingue}}$  deve riflettere relazioni di vicinanza e continuità tra contesti che coinvolgono lingue diverse. Due contesti  $c_1$  e  $c_2$  sono topologicamente vicini se differiscono minimamente lungo tutte le dimensioni rilevanti, inclusa quella linguistica. Crucialmente, questo significa che un contesto monolingue in  $L_1$  può essere topologicamente vicino a un contesto code-switched  $L_1/L_2$  se le altre dimensioni contestuali (situazione, partecipanti, scopi comunicativi) sono simili. Questa vicinanza topologica cattura la fluidità empiricamente osservata con cui i parlanti bilingui transitano tra modalità monolingui e code-switched, spesso senza consapevolezza metacomunicativa esplicita.

## 26.2 Code-Switching: Alternanza di Codice come Navigazione Topologica nello Spazio Linguistico

Il code-switching, fenomeno pervasivo nelle comunità bi- o plurilingui, consiste nell'alternanza, all'interno di un singolo evento comunicativo o persino di un singolo enunciato, tra due o più lingue o varietà linguistiche. Questa alternanza non è caotica o arbitraria, ma segue pattern sistematici governati da vincoli sintattici, semantici, pragmatici e sociolinguistici che sono stati oggetto di decenni di ricerca empirica intensiva, producendo un corpus sostanziale di generalizzazioni e universali proposti.

Un esempio paradigmatico di code-switching intrasentenziale, che avviene all'interno dei confini di una singola frase sintattica, è offerto dalle produzioni di parlanti bilingui spagnolo-inglese negli Stati Uniti, ampiamente studiate nella letteratura sociolinguistica:

"Voy a comprar some groceries porque we need milk and eggs para el desayuno"

(Letteralmente: "Vado a comprare some groceries perché we need milk and eggs per la colazione")

Questa frase alterna tra spagnolo e inglese molteplici volte, ma l'alternanza non è random: segue punti di transizione sintatticamente permessi, rispetta vincoli morfologici (non si spezzano parole morfologicamente complesse tra le lingue), e serve funzioni pragmatiche e sociali specifiche (per esempio, termini tecnici o culturalmente specifici tendono a essere realizzati nella lingua di origine, espressioni emotive o valutative possono gravitare verso la lingua dominante del parlante, eccetera).

Modelliamo il code-switching come un percorso continuo, un arco topologico, nello spazio contestuale multilingue  $X_{\text{multilingue}}$ . Un enunciato  $E$  che esibisce code-switching corrisponde a una funzione continua:

$$\gamma_E: [0, T] \rightarrow X_{\text{multilingue}}$$

dove il parametro  $t \in [0, T]$  rappresenta la progressione temporale o sequenziale attraverso l'enunciato (potremmo parametrizzare per parole, morfemi, o unità prosodiche), e  $\gamma_E(t)$  specifica il contesto linguistico-contestuale al "momento"  $t$  dell'enunciato. La componente linguistica di  $\gamma_E(t)$  indica quale lingua è attiva in quella porzione dell'enunciato.

La continuità di  $\gamma_E$  è cruciale: riflette il fatto che il code-switching, pur alternando tra lingue discrete, avviene attraverso transizioni che rispettano vincoli di coerenza contestuale. Non ci sono "salti discontinui" arbitrari nello spazio contestuale complessivo; anche quando la componente linguistica cambia drammaticamente (da  $L_1$  a  $L_2$ ), le altre componenti contestuali (situazione, partecipanti, scopi comunicativi) variano continuamente, fornendo il "ponte" topologico che rende la transizione ammissibile.

Formalizziamo i vincoli sul code-switching attraverso restrizioni sulla classe di percorsi ammissibili. Sia  $\Gamma_{CS}$  l'insieme di tutti i percorsi  $\gamma: [0, T] \rightarrow X_{multilingue}$  che rappresentano enunciati con code-switching. Definiamo sottoinsiemi:

$\Gamma_{CS}^{\text{sintatticamente\_ammissibile}} = \{\gamma \in \Gamma_{CS} : \gamma \text{ rispetta vincoli sintattici di code-switching}\}$

Questi vincoli sintattici sono stati formulati in varie teorie. Il celebre Equivalence Constraint di Poplack (1980) afferma che il code-switching può avvenire solo in punti dove la giustapposizione di elementi delle due lingue non viola le regole sintattiche di nessuna delle due lingue. Formalmente, se scomponiamo  $\gamma$  in segmenti  $\gamma = \gamma_1^{L_1} \cdot \gamma_2^{L_2} \cdot \gamma_3^{L_1} \cdot \dots$  dove  $\gamma_i^{L_i}$  è un segmento nella lingua  $L_i$ , allora ai punti di transizione  $\gamma_i^{L_i} \mid \gamma_{i+1}^{L_{i+1}}$  (dove  $\mid$  denota il confine), le strutture sintattiche devono essere compatibili:

$\text{Struct\_sintattiche}(\gamma_i^{L_i}, \gamma_{i+1}^{L_{i+1}}) \in \text{Configurazioni\_ammissibili}(L_i, L_{i+1})$

Un vincolo più recente e raffinato è la Matrix Language Frame Model di Myers-Scotton (1993), che propone che in un enunciato code-switched esista una lingua matrice (Matrix Language, ML) che fornisce la struttura morfosintattica globale, e una lingua embedded (Embedded Language, EL) che contribuisce isole lessicali o sintagmatiche. I morfemi di sistema (funzionali, flessivi, che codificano relazioni grammaticali) devono provenire dalla ML, mentre i morfemi di contenuto possono provenire da entrambe le lingue.

Nel nostro framework a fasci, la Matrix Language Frame corrisponde a una restrizione sulla struttura topologica del percorso  $\gamma$ : esiste una "direzione privilegiata" o "sezione di base" in  $X_{linguistico\_multiplo}$  corrispondente alla ML, e il percorso  $\gamma$  si mantiene in un tubular neighborhood (intorno tubolare) attorno a questa sezione di base, con escursioni controllate verso la EL che sono localmente embedding sintattici piuttosto che switch completi di frame grammaticale.

Definiamo più formalmente. Sia  $\sigma_{ML}$  una sezione del fascio grammaticale  $F_{grammatica}$  corrispondente alla struttura della Matrix Language. Il percorso  $\gamma$  è ML-framed se:

$d_{grammaticale}(\gamma(t), \sigma_{ML}(\pi(\gamma(t)))) < \varepsilon_{threshold}$  per ogni  $t \in [0, T]$

dove  $d_{grammaticale}$  è una metrica appropriata sullo spazio delle strutture grammaticali,  $\pi: X_{multilingue} \rightarrow X_{contesto}$  è la proiezione che dimentica i dettagli linguistici mantenendo il

contesto socio-situazionale, e  $\varepsilon_{\text{threshold}}$  è una soglia contestualmente determinata che specifica quanto "lontano" dalla struttura ML il percorso può deviare.

Le mappe di restrizione contestuale  $\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{CS}}(U) \rightarrow F_{\text{CS}}(V)$  per  $V \subseteq U$  modellano come i pattern di code-switching si specializzano quando restringiamo il contesto. Per esempio, se  $U$  rappresenta contesti generali di conversazione informale bilingue, mentre  $V \subseteq U$  rappresenta contesti più specifici di narrazione personale emotiva, potremmo osservare che:

$$\rho_{\{U,V\}}(\text{pattern\_CS\_generale}) = \text{pattern\_CS\_emotivo}$$

dove il pattern emotivo tende a favorire code-switching verso la lingua  $L_1$  (tipicamente la lingua materna o quella dell'infanzia) per espressioni cariche emotivamente, un fenomeno ampiamente documentato empiricamente. Questo riflette come vincoli contestuali più stretti (specializzazione da  $U$  a  $V$ ) riducono la variabilità nei pattern di alternanza.

### 26.2.1 Funzioni Pragmatiche del Code-Switching: Fasci di Forze Comunicative

Il code-switching non è semplicemente alternanza neutra tra codici equivalenti, ma serve funzioni pragmatiche e sociali sofisticate, multifunzionali e sfaccettate. La ricerca sociolinguistica ha identificato numerose funzioni del code-switching:

**Funzione citazionale o reportativa:** Riportare discorso altrui nella lingua originale. "Mi ha detto 'I don't care' e se ne è andato" - il discorso diretto è reso nella lingua originale per autenticità.

**Funzione enfatica o espressiva:** Marcare enfasi, emozione intensa, o cambiamento di atteggiamento. L'alternanza stessa funziona come segnale prosodico amplificato.

**Funzione di topic shift:** Segnalare cambio di argomento conversazionale. Passare da  $L_1$  a  $L_2$  può marcare "ora parlo di qualcos'altro".

**Funzione identitaria:** Costruire, negoziare, performare identità sociali, etniche, professionali multiple. Alternare tra  $L_1$  e  $L_2$  può essere modo di reclamare appartenenza a molteplici comunità simultaneamente.

**Funzione di accomodamento:** Adattarsi all'interlocutore, segnalare solidarietà o distanza sociale modificando scelta linguistica.

**Funzione riempitiva lessicale:** Supplire lacune lessicali. Quando un concetto è più facilmente esprimibile o lessicalizzato in  $L_2$  piuttosto che in  $L_1$ , il parlante può code-switch per quella unità lessicale specifica.

Modelliamo queste funzioni come morfismi tra fasci:

$$\varphi_{\text{funzione}}: F_{\text{CS\_pattern}} \rightarrow F_{\text{funzione\_pragmatica}}$$

che assegna a ogni pattern di code-switching osservabile (rappresentato come sezione nel fascio dei pattern) un insieme di funzioni pragmatiche che quel pattern può servire contestualmente. Formalmente, per ogni aperto  $U \subseteq X_{\text{multilingue}}$ :

$$\varphi_{\text{funzione},U}: F_{\text{CS\_pattern}}(U) \rightarrow P(F_{\text{funzione\_pragmatica}}(U))$$

dove  $P$  denota insieme potenza, riflettendo che un singolo pattern può servire molteplici funzioni simultaneamente (multifunzionalità).

La compatibilità con restrizioni contestuali garantisce che le funzioni pragmatiche si comportano coerentemente:

$$\rho^{\text{funzione}}_{\{U,V\}} \circ \varphi_{\text{funzione},U} \subseteq \varphi_{\text{funzione},V} \circ \rho^{\text{pattern}}_{\{U,V\}}$$

(usando inclusione invece di uguaglianza perché specializzare il contesto può eliminare alcune funzioni pragmatiche che erano possibili nel contesto più ampio, riducendo l'ambiguità funzionale).

### 26.2.2 Code-Switching e Fasci di Identità Sociolinguistica

Uno degli aspetti più profondi socio-pragmaticamente del code-switching è la sua funzione nella costruzione e negoziazione di identità sociali multiple. Parlanti bilingui usano strategicamente l'alternanza di codice per posizionarsi rispetto a diverse comunità di pratica, per segnalare appartenenze multiple, per navigare tensioni identitarie.

Consideriamo un parlante bilingue spagnolo-inglese negli Stati Uniti che alterna tra le lingue in conversazione con amici bilingui. L'uso dello spagnolo può indicizzare identità latinx, solidarietà etnica, connessione con heritage culturale. L'uso dell'inglese può indicizzare identità americana, integrazione nella società anglofona dominante, educazione formale, professionalità. Alternare fluidamente tra le due lingue performa un'identità ibrida, transnazionale, che rifiuta categorizzazioni rigide.

Definiamo un fascio di identità sociolinguistica  $F_{\text{identità}}$  su  $X_{\text{multilingue}}$  che assegna a ogni contesto  $c$  un insieme di posizionamenti identitari disponibili o proiettati:

$$F_{\text{identità}}(U) = \{s: U \rightarrow P(\text{Identità\_disponibili}) \text{ tali che } s(c) \text{ specifica quali identità sociolinguistiche sono attivate, disponibili, o performati nel contesto } c \in U\}$$

Il code-switching induce un morfismo:

$$\mu_{\text{CS}}: F_{\text{CS\_usage}} \rightarrow F_{\text{identità}}$$

che mappa pattern di uso code-switched a configurazioni identitarie. Quando un parlante code-switches, questo comportamento linguistico osservabile si traduce in segnali identitari interpretabili dagli interlocutori.

Crucialmente, questo morfismo non è deterministico o univoco. Lo stesso pattern di code-switching può essere interpretato diversamente da interlocutori diversi, o nello stesso modo ma con valutazioni sociali differenti (positivo/solidale vs negativo/escludente). Quindi  $\mu_{\text{CS}}$  è propriamente un morfismo multivalore o stocastico:

$\mu_{CS,U}: F_{CS\_usage}(U) \rightarrow P(F_{identità}(U))$

associando a pattern di code-switching insiemi di possibili interpretazioni identitarie.

Le mappe di restrizione catturano come interpretazioni identitarie si specializzano contestualmente. In contesti di interazione intra-gruppo ( $U_{ingroup}$  dove tutti i partecipanti sono bilingui solidali), il code-switching può essere interpretato come marcatore di solidarietà e autenticità. Restringendo a contesti inter-gruppo ( $V_{intergroup} \subseteq U_{general}$  dove sono presenti monolingui o outgroup members), lo stesso code-switching può essere reinterpretato come escludente o come performance di competenza linguistica.

## 26.3 Prestiti Linguistici: Integrazione Lessicale e Fasci di Adattamento Fonologico-Morfologico

I prestiti linguistici (borrowing, loanwords) costituiscono un fenomeno distinto dal code-switching, pur essendo correlato. Mentre il code-switching mantiene alternanza consapevole tra sistemi linguistici distinti, i prestiti rappresentano integrazione stabile di elementi lessicali (e occasionalmente morfologici o sintattici) da una lingua donatrice (source language) in una lingua ricevente (recipient language), con vari gradi di adattamento fonologico, morfologico e semantico al sistema ricevente.

I prestiti attraversano uno spettro di integrazione:

**Prestiti non adattati (nonce borrowings o code-switches lessicali):** Elementi della lingua donatrice usati occasionalmente, mantenendo fonologia e morfologia originale, senza integrazione stabile. "Ho comprato un croissant" - dove "croissant" mantiene pronuncia francese approssimativa.

**Prestiti parzialmente adattati:** Integrazione fonologica (pronuncia adattata al sistema ricevente) ma morfologia ancora estranea. "Ho scaricato dei file" - "file" ha pronuncia italianizzata ma morfologia inglese (plurale zero).

**Prestiti completamente adattati:** Integrazione totale fonologica, morfologica, e sintattica. "Ho cliccato sul bottone" - "cliccare" deriva da inglese "click" ma riceve morfologia verbale italiana completa (-are, -ato, eccetera).

**Calchi semantici (semantic loans):** Struttura morfologica e fonologica nativa, ma significato copiato dalla lingua donatrice. Italiano "realizzare" nel senso di "rendersi conto" è calco semantico da inglese "realize", estendendo il significato nativo italiano "rendere reale".

Modelliamo l'integrazione dei prestiti come processo dinamico attraverso il tempo, rappresentabile come percorso nello spazio topologico delle forme linguistiche. Sia  $F$  lo spazio di tutte le forme lessicali possibili, dotato di topologia che riflette similarità fonologica, morfologica e semantica. Un prestito  $p$  inizia in una regione  $F_{donatrice}$  corrispondente al sistema della lingua donatrice  $L_D$  e attraverso tempo e uso si muove gradualmente verso  $F_{ricevente}$ , la regione corrispondente al sistema della lingua ricevente  $L_R$ .

Formalmente, l'adattamento di un prestito è un arco:



$$\delta_p: [t_0, t_1] \rightarrow F$$

dove  $t_0$  è il tempo di primo contatto/introduzione del prestito,  $t_1$  rappresenta uno stato temporale posteriore di integrazione (potenzialmente  $t_1 \rightarrow \infty$  per integrazione completa), e  $\delta_p(t_0) \in F_{\text{donatrice}}$  mentre  $\lim_{t \rightarrow t_1} \delta_p(t) \in F_{\text{ricevente}}$  o si avvicina asintoticamente.

La continuità topologica di  $\delta_p$  riflette la gradualità dell'adattamento: non ci sono salti discontinui nella forma fonologica o morfologica, ma piuttosto transizioni graduali guidate da pressioni di adattamento al sistema ricevente e mantenimento di riconoscibilità/identità lessicale.

### 26.3.1 Fasci di Adattamento Fonologico: Nativizzazione Graduale

L'adattamento fonologico dei prestiti è governato da principi sistematici che riflettono la fonologia della lingua ricevente. Segmenti fonologici assenti nella  $L_R$  vengono sostituiti con i segmenti più vicini disponibili. Strutture sillabiche illecite vengono riparate tramite inserzione o delezione.

Definiamo un fascio  $F_{\text{fonologia}}(L_R)$  sulla lingua ricevente che assegna a ogni contesto sociolinguistico  $U$  le regole fonologiche e inventari fonemici rilevanti:

$$F_{\text{fonologia}}(L_R)(U) = \{(\Phi, R) : \Phi \text{ è inventario fonemico, } R \text{ è insieme di regole fonologiche/fonotattiche attive in } U\}$$

Un prestito  $p$  con forma fonologica fonte  $\varphi_{\text{fonte}}$  nella lingua donatrice deve essere mappato a una forma adattata  $\varphi_{\text{adattata}}$  ammissibile secondo le regole della lingua ricevente. Definiamo morfismo di adattamento:

$$\alpha_{\text{fonologico}}: \text{Forme}_{\text{fonte}} \rightarrow \text{Forme}_{\text{riceventi}}$$

tale che  $\alpha_{\text{fonologico}}(\varphi_{\text{fonte}}) = \varphi_{\text{adattata}}$  dove  $\varphi_{\text{adattata}}$  soddisfa i vincoli:

- Tutti i fonemi in  $\varphi_{\text{adattata}}$  appartengono a  $\Phi$  (l'inventario fonemico di  $L_R$ )
- La struttura sillabica di  $\varphi_{\text{adattata}}$  rispetta  $R$  (le fonotattiche di  $L_R$ )
- La distanza fonologica  $d_{\text{fono}}(\varphi_{\text{fonte}}, \varphi_{\text{adattata}})$  è minimizzata (fedeltà massima all'input compatibilmente con vincoli)

Questo è precisamente il tipo di ottimizzazione che la Teoria dell'Ottimalità (Optimality Theory, Prince & Smolensky 1993) modella attraverso ranking di vincoli di fedeltà (faithfulness) e marcatezza (markedness). Nel nostro framework, possiamo rappresentare la grammatica OT come sezione di un fascio che specifica ranking di vincoli contestualmente:

$$F_{\text{OT}}(U) = \{\sigma: U \rightarrow \text{Rankings} \text{ dove } \sigma(c) \text{ specifica il ranking di vincoli vigente nel contesto sociolinguistico } c\}$$

Le mappe di restrizione  $p_{\{U,V\}}: F_{\text{OT}}(U) \rightarrow F_{\text{OT}}(V)$  modellano come i ranking di vincoli possono variare tra sottocontesti. Per esempio, in contesti formali ( $V_{\text{formale}} \subseteq U_{\text{generale}}$ ), i vincoli di fedeltà alla pronuncia della lingua donatrice potrebbero essere ranked più in alto (prestigio associato a pronuncia "corretta" forestiera), mentre in contesti

informali i vincoli di marcatezza della L\_R dominano (pressione verso nativizzazione completa).

### 26.3.2 Adattamento Morfologico e Fasci di Categorie Grammaticali

I prestiti nominali devono essere assegnati a classi grammaticali (genere, declinazione) della lingua ricevente. I prestiti verbali devono essere integrati nel sistema di coniugazione. Questo adattamento morfologico spesso segue pattern sistematici ma può anche esibire variazione e incertezza.

Consideriamo l'italiano che prende in prestito sostantivi inglesi. L'inglese non marca genere morfologicamente, quindi un prestito come "computer" deve essere assegnato a genere maschile o femminile in italiano. La maggioranza dei prestiti inglesi ricevono genere maschile per default (il computer, il file, il mouse), ma ci sono eccezioni (la mail, ambiguità su "email"). I principi che governano l'assegnazione includono:

- Default: maschile (marcato statisticamente)
- Analogia: se esiste traduttore nativo, il prestito eredita il genere ("la mail" perché "la posta")
- Morfologia: terminazioni fonetiche che in italiano correlano con genere possono influenzare ("-a" finale suggerisce femminile, anche se in inglese non marca genere)

Definiamo fascio delle categorie grammaticali  $F\_cat\_gram(L\_R)$  che assegna a ogni forma lessicale la sua categoria grammaticale:

$$F\_cat\_gram(L\_R)(U) = \{\text{funzioni } c: \text{Lessico}(U) \rightarrow \text{Categorie\_grammaticali}\}$$

Per prestiti,  $c$  è inizialmente sottodeterminata: il prestito  $p$  non ha categoria grammaticale specificata nativamente nella L\_R. L'integrazione morfologica consiste nel risolvere questa sottodeterminazione, assegnando  $p$  a una categoria.

Morfismo di assegnazione categoriale:

$$\beta\_morfologico: F\_prestiti \times F\_analogie \times F\_frequenze \rightarrow F\_cat\_gram$$

che prende in input informazioni sul prestito, analogie disponibili nel lessico ricevente, e frequenze d'uso, e outputs assegnazione categoriale. Questo morfismo è stocastico/probabilistico, catturando variabilità e gradualità nell'integrazione.

Le mappe di restrizione modellano come l'assegnazione si stabilizza nel tempo. Inizialmente (contesto  $U\_iniziale$  temporalmente precoce),  $\beta$  può assegnare molteplici categorie con probabilità simili, riflettendo incertezza e variazione tra parlanti. Restrungendo a contesti temporalmente posteriori ( $V\_tardo \subseteq U\_generale$ ), una categoria diventa dominante attraverso conventionalizzazione.

## 26.4 Fenomeni di Contatto Linguistico Prolungato: Convergenza Strutturale e Fasci di Interferenza

Quando due o più lingue coesistono in una comunità in situazione di contatto prolungato (secoli, generazioni multiple), emergono fenomeni di convergenza strutturale che vanno oltre singoli prestiti lessicali. Le lingue possono influenzarsi reciprocamente a livelli fonologici, morfologici, sintattici, e persino semantici, portando a configurazioni areali (Sprachbünde) dove lingue geneticamente non imparentate condividono tratti strutturali per diffusione areale.

Un caso paradigmatico è l'area linguistica balcanica (Balkan Sprachbund), dove lingue appartenenti a famiglie diverse (greco, albanese, romeno, bulgaro, macedone, serbo-croato) hanno sviluppato convergenze strutturali notevoli:

- Perdita dell'infinito sostituito da costruzioni con congiunzioni subordinanti
- Articolo postposto enclitico nei sostantivi (invece di preposizione tipica di lingue IE occidentali)
- Formazione del futuro con verbi volitivi ("volere" > ausiliare futuro)
- Sistema evidenziale (distinzione grammaticale tra informazione diretta/indiretta)

Queste convergenze non sono coincidenze ma risultato di secoli di bilinguismo diffuso, traduzioni, calchi strutturali, e interferenza sistematica.

Modelliamo il contatto linguistico prolungato come evoluzione temporale di fasci grammaticali. Inizialmente, lingue  $L_1$  e  $L_2$  in contatto hanno fasci grammaticali distinti  $F_{\text{gram}}(L_1)$  e  $F_{\text{gram}}(L_2)$  con sovrapposizioni minimali. Nel tempo, sotto pressione di contatto (bilinguismo diffuso, traduzione frequente, prestigio relativo, dominanza numerica), i fasci evolvono:

$F_{\text{gram}}(L_1, t)$  e  $F_{\text{gram}}(L_2, t)$

dove  $t$  è tempo evolutivo. La convergenza significa che la "distanza" tra i fasci diminuisce:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} d_{\text{grammaticale}}(F_{\text{gram}}(L_1, t), F_{\text{gram}}(L_2, t)) < d_{\text{grammaticale}}(F_{\text{gram}}(L_1, t_0), F_{\text{gram}}(L_2, t_0))$$

dove  $d_{\text{grammaticale}}$  è qualche metrica appropriata sullo spazio dei fasci grammaticali, misurante similarità strutturale.

### 26.4.1 Interferenza e Transfer: Morfismi Cross-Linguistici Involontari

L'interferenza linguistica si manifesta quando un parlante bilingue trasferisce involontariamente pattern da una lingua all'altra, producendo forme deviant o non native ma sistematiche. L'interferenza può essere:

**Fonologica:** Accento straniero, sostituzioni fonemiche sistematiche. Un italiano L1 che parla inglese L2 tende a sostituire /θ/ (interdentale fricativo sordo, assente in italiano) con /t/ o /s/.

**Morfologica:** Sovraestensione di pattern morfologici da L1 a L2. Un anglofono che impara italiano potrebbe produrre \*"ho visto-ed" applicando morfema passato inglese "-ed" a verbo italiano.

**Sintattica:** Trasferimento di ordini sintattici. Un tedesco L1 parlante inglese L2 potrebbe produrre "I have the book read" (ordine SOV) invece di "I have read the book" (ordine SVO).

**Semantica:** Calchi semantici involontari. Un ispanofono potrebbe dire "I am excited" volendo dire "sono emozionato" (positivo), ma eccitato in inglese ha connotazioni sessuali che "emocionado" in spagnolo non ha sempre.

Modelliamo l'interferenza come morfismo non-nativo:

$$\tau_{\text{interferenza}}: F_{\text{gram}}(L_1) \rightarrow F_{\text{produzioni}}(L_2)$$

che mappa strutture grammaticali native di  $L_1$  a produzioni (potenzialmente non-native) in  $L_2$ . Questo morfismo opera quando il parlante, cercando di produrre in  $L_2$ , attiva involontariamente pattern da  $L_1$ .

Le mappe di restrizione catturano come l'interferenza varia con competenza e contesto. Per parlanti con bassa competenza in  $L_2$  ( $U_{\text{beginner}}$ ),  $\tau_{\text{interferenza}}$  produce massima interferenza, molte forme deviant. Restrignendo a parlanti avanzati ( $V_{\text{advanced}} \subseteq U_{\text{general}}$ ),  $\tau_{\text{interferenza}}$  è attenuata, producendo meno interferenza e più produzioni native-like.

La direzione dell'interferenza può essere asimmetrica a causa di dominanza linguistica. Tipicamente,  $L_1$  interferisce con  $L_2$  più che viceversa, ma in situazioni di language shift (spostamento linguistico, dove una comunità abbandona progressivamente  $L_1$  in favore di  $L_2$  dominante), può emergere interferenza inversa dove  $L_2$  influenza produzioni in  $L_1$ , fenomeno chiamato "attrition" (attrito linguistico).

## 26.4.2 Fasci di Competenza Multipla: Continuum Monolingue-Bilingue-Plurilingue

Contrariamente all'ideale monolingue che ha dominato molta linguistica teorica (Chomsky's idealized speaker-hearer in a completely homogeneous speech community), la realtà sociolinguistica è caratterizzata da competenze multiple su un continuum. Parlanti hanno competenze variabili in molteplici lingue/dialetti/registri, e queste competenze non sono discrete ma graduate e contestualmente modulabili.

Definiamo un fascio di competenza  $F_{\text{competenza}}$  su spazio di parlanti  $S \times$  spazio di varietà linguistiche  $L$ :

$$F_{\text{competenza}}(U \times V) = \{\text{funzioni } \kappa: U \times V \rightarrow [0,1] \text{ dove } \kappa(s, \ell) \text{ specifica il grado di competenza del parlante } s \in U \text{ nella varietà } \ell \in V\}$$

I valori in  $[0,1]$  rappresentano competenza graduata: 0 = nessuna competenza, 1 = competenza nativa completa, valori intermedi = competenza parziale (interlanguage, apprendenti L2, semi-speakers in situazioni di language shift).

Le mappe di restrizione modellano come la competenza varia attraverso sotto-popolazioni e sotto-varietà. Restrignendo a parlanti più giovani in comunità di language shift ( $V_{\text{young}} \subseteq$

$U_{community}$ ), la competenza nella lingua heritage L1 può essere ridotta ( $\kappa(s, L1) < 0,5$  per molti  $s \in V_{young}$ ), mentre competenza nella lingua dominante L2 è alta.

Il fascio di competenza interagisce con fasci di produzione e percezione attraverso morfismi:

$\pi_{produzione}: F_{competenza} \rightarrow F_{produzioni}$  (competenza determina quali produzioni sono possibili)  $\pi_{percezione}: F_{competenza} \rightarrow F_{percezioni}$  (competenza determina quali distinzioni sono percepibili)

Questi morfismi sono generalmente monotoni: maggiore competenza permette produzioni più sofisticate e percezioni più fini. Ma ci possono essere effetti non-monotoni interessanti: competenze intermedie in L2 possono portare a ipercorrezione (overcorrection), dove il parlante sovraestende regole per evitare errori, producendo forme iper-corrette ma non native.

## 26.5 Creolizzazione: Emergenza di Nuovi Sistemi Linguistici e Fasci di Genesi

La creolizzazione rappresenta il fenomeno più drammatico di contatto linguistico: l'emergenza di un sistema linguistico completamente nuovo, un creolo, da situazioni di contatto multilinguistico intenso, tipicamente in contesti coloniali, di schiavitù, o di migrazione forzata, dove parlanti di molteplici lingue mutuamente incomprensibili devono comunicare urgentemente senza lingua comune.

Il processo standard di creolizzazione prevede stadi:

**Pidgin:** Sistema linguistico rudimentale, semplificato, con lessico limitato, grammatica ridotta, usato per comunicazione interetnica/commerciale basilare. Nessun parlante nativo. Esempi: pidgin del Pacifico, pidgin commerciali coloniali.

**Pidgin espanso:** Con uso continuato, il pidgin si espande lessicalmente e grammaticalmente, sviluppando maggiore espressività e complessità. Ancora nessun parlante nativo tipicamente.

**Creolo:** Quando una generazione di bambini acquisisce il pidgin come lingua materna (nativizzazione), avviene un salto qualitativo. Il sistema si ristruttura, sviluppando grammatica completa, regolarità morfologica, espandendo domains funzionali. Il creolo è lingua completa, non semplificata. Esempi: creolo haitiano, tok pisin, kriol australiano, gullah.

La teoria più influente sulla creolizzazione è la Language Bioprogram Hypothesis di Derek Bickerton, che propone che i bambini, esposti a input pidgin destrutturato e impoverito, attivano una "biogrammatica" universale innata che ristruttura il pidgin in creolo con proprietà grammaticali universali. Altre teorie enfatizzano continuità con lingue substrato (lingue native degli schiavi/colonizzati) e superstrato (lingua dei colonizzatori), o processi di apprendimento imperfetto di L2.

### 26.5.1 Spazi Topologici di Genesi e Fasci Emergenti

Modelliamo la creolizzazione come processo di emergenza topologica. Inizialmente, abbiamo uno spazio linguistico frammentato, costituito da isole disconnesse corrispondenti alle molteplici lingue substrato  $L_{s1}$ ,  $L_{s2}$ , ...,  $L_{sn}$  e alla lingua superstrato  $L_{sup}$ , con comunicazione inter-gruppo minima.

$X_{pre-pidgin} = L_{s1} \sqcup L_{s2} \sqcup \dots \sqcup L_{sn} \sqcup L_{sup}$  (somma disgiunta, topologicamente disconnessa)

La formazione del pidgin corrisponde a creazione di "ponti" topologici, connessioni tra le isole precedentemente disconnesse. Elementi lessicali dalla superstrato, grammatica semplificata con influenze miste, forme di compromesso emergono creando un nuovo spazio connesso:

$X_{pidgin} = \bigcup_i L_{si}$  con ponti topologici = spazio connesso ma strutturalmente semplice

Il passaggio da pidgin a creolo è modellato come transizione di fase topologica, dove la struttura semplice del pidgin subisce ristrutturazione drammatica sotto pressione di nativizzazione. Il fascio grammaticale  $F_{gram}(pidgin)$  è relativamente povero:

$F_{gram}(pidgin)(U) = \{\text{grammatiche rudimentali, con regole variabili, eccezioni frequenti, instabilità}\}$

La nativizzazione induce morfismo di stabilizzazione e complessificazione:

$v_{nativizzazione}: F_{gram}(pidgin) \rightarrow F_{gram}(creolo)$

dove  $F_{gram}(creolo)$  ha proprietà emergenti:

$F_{gram}(creolo)(U) = \{\text{grammatiche complete, con sistemi TAM (tempo-aspetto-modo) articolati, morfologia regolarizzata, sintassi stabile}\}$

Le sezioni in  $F_{gram}(creolo)$  soddisfano proprietà universali che sono caratteristiche cross-creolo, suggerendo vincoli universali sulla struttura linguistica umana (supporto per Universal Grammar in qualche forma).

### 26.5.2 Fasci di Substrato e Superstrato: Stratificazione Genealogica

Un creolo maturo mostra stratificazione genealogica, con componenti riconducibili a substrato vs superstrato:

**Lessico:** Tipicamente dominato dalla superstrato (70-90% del vocabolario base deriva dalla lingua coloniale)

**Grammatica:** Forte influenza substrato (pattern sintattici, categorie grammaticali spesso riflettono substrato)

**Fonologia:** Mista, con adattamenti della fonologia superstrato verso sistemi substrato

Definiamo fasci stratificati:

$$F_{\text{lessico}}(\text{creolo}) = F_{\text{lessico}}(\text{superstrato}) \oplus F_{\text{lessico}}(\text{substrato}) \oplus F_{\text{innovazioni}}$$

dove  $\oplus$  denota una somma diretta pesata, riflettendo contributi proporzionali.

$$F_{\text{grammatica}}(\text{creolo}) = F_{\text{grammatica}}(\text{substrato}) \oplus F_{\text{grammatica}}(\text{superstrato}) \oplus F_{\text{universali}} \oplus F_{\text{innovazioni}}$$

I pesi relativi di questi componenti variano tra creoli, dipendendo da demografia storica (rapporto numerico colonizzatori/colonizzati), intensità di contatto, durata del periodo di formazione.

Le mappe di restrizione temporale modellano evoluzione post-creolizzazione. Un creolo può subire decreolizzazione se rimane in contatto con la superstrato (spesso lingua di prestigio), mostrando convergenza verso la superstrato. Alternativamente, può sviluppare autonomamente sotto pressures di standardizzazione e development letterario.

### 26.5.3 Ostruzioni Coomologiche alla Genesi: Quando la Creolizzazione Fallisce

Non tutte le situazioni di contatto multilinguistico intenso portano a creolizzazione. Alcune condizioni socio-demografiche prevengono emergenza di creolo stabile. Potremmo modellare questo come ostruzioni coomologiche.

Consideriamo un ricoprimento dello spazio sociolinguistico da gruppi etnici  $\{U_i\}$  dove  $U_i$  rappresenta il gruppo  $i$ -esimo. Ciascun gruppo ha una lingua  $L_i$  e pattern comunicativi parzialmente sovrapponentisi con altri gruppi. Per formare un creolo, è necessario incollare questi pattern locali in sistema globale coerente.

Le sezioni locali  $s_i \in F_{\text{lingua}}(U_i)$  rappresentano le lingue dei gruppi. L'incollamento richiede compatibilità sulle sovrapposizioni  $U_i \cap U_j$ . Se i gruppi sono troppo segregati socialmente ( $U_i \cap U_j \approx \emptyset$  per la maggior parte  $i, j$ ), non c'è sufficiente interazione per sviluppare lingua condivisa. L'ostruzione  $H^1(X_{\text{sociolinguistico}}, F_{\text{lingua}})$  è non-banale, segnalando impossibilità di incollare lingue locali in sistema globale.

Alternativamente, se c'è una lingua franca pre-esistente (una delle  $L_i$  è parlata ampiamente come  $L_2$ ), questo può prevenire emergenza di pidgin/creolo perché la comunicazione inter-gruppo avviene attraverso la lingua franca piuttosto che sistema nuovo. La sezione globale  $s_{\text{franca}} \in F_{\text{lingua}}(X)$  risolve l'ostruzione prima che processi di pidginizzazione/creolizzazione siano necessari.

## Capitolo 27: Analisi di Generi Testuali Specifici: Fasci Semantici attraverso Narrative, Poesia, Testi Scientifici e Dialoghi

## 27.1 Introduzione: Generi Testuali come Regioni Topologiche nello Spazio Discorsivo

I generi testuali, intesi come categorie convenzionalizzate e culturalmente riconosciute di testi che condividono scopi comunicativi, strutture retoriche, caratteristiche linguistiche e norme stilistiche, costituiscono dimensioni organizzative fondamentali dello spazio discorsivo complessivo. Un testo narrativo, una poesia lirica, un articolo scientifico, una conversazione quotidiana non differiscono solo superficialmente nel loro contenuto specifico o nella loro forma linguistica contingente, ma appartengono a regioni qualitativamente distinte dello spazio topologico dei testi possibili, ciascuna caratterizzata da proprietà strutturali, vincoli semantico-pragmatici, e aspettative interpretative che sono specifiche al genere.

La teoria dei fasci semantici offre strumenti particolarmente potenti per modellare questa differenziazione generica, permettendoci di rappresentare formalmente come le interpretazioni semantiche, le strutture narrative, le convenzioni stilistiche, e le norme pragmatiche si comportino in modo sistematicamente diverso attraverso differenti generi testuali, pur mantenendo relazioni di continuità e sovrapposizione topologica che riflettono ibridazioni, sotto-generi, e evoluzioni storiche dei generi stessi.

Formalizziamo questa intuizione definendo uno spazio topologico  $G$  dei generi testuali, dove ciascun punto  $g \in G$  rappresenta un genere specifico o una configurazione generica particolare. La topologia su  $G$  riflette relazioni di similarità, inclusione, e evoluzione storica tra generi. Due generi  $g_1$  e  $g_2$  sono topologicamente vicini se condividono molte proprietà strutturali e retoriche. Per esempio:

- Romanzo realistico e racconto breve realistico sono vicini (stesso registro, stesse convenzioni rappresentazionali, differiscono principalmente in lunghezza e scala narrativa)
- Poesia epica e poesia lirica sono più distanti (differenze in scopo comunicativo, struttura, voce poetica)
- Articolo scientifico e recensione scientifica sono vicini (condividono registro tecnico, norme epistemiche, audience specializzata)

Definiamo aperti in  $G$  che corrispondono a "famiglie" o "macro-generi":

$U_{\text{narrativa}} = \{\text{romanzo, racconto, novella, epica, favola, ...}\} \subseteq G$   
 $U_{\text{poesia}} = \{\text{lirica, epica, drammatica, haiku, sonetto, ...}\} \subseteq G$   
 $U_{\text{scientifico}} = \{\text{articolo\_ricerca, review, monografia, manuale, ...}\} \subseteq G$   
 $U_{\text{conversazionale}} = \{\text{dialogo\_quotidiano, intervista, dibattito, ...}\} \subseteq G$

Questi aperti possono sovrapporsi, riflettendo ibridazioni e generi border-line:

$U_{\text{narrativa}} \cap U_{\text{poesia}} \neq \emptyset$  (contiene poesia epica narrativa, poemi narrativi)  
 $U_{\text{scientifico}} \cap U_{\text{conversazionale}} \neq \emptyset$  (contiene dialoghi scientifici, interviste tecniche)

I fasci semantici  $F$  definiti su questo spazio topologico  $G$  assegnano a ogni genere (o famiglia di generi rappresentata da un aperto) le strutture semantiche, retoriche, e pragmatiche caratteristiche:



$F\_struttura(U) = \{\text{configurazioni strutturali ammissibili per testi nel genere o famiglia di generi } U\}$

Le mappe di restrizione  $p_{\{U,V\}}: F\_struttura(U) \rightarrow F\_struttura(V)$  per  $V \subseteq U$  modellano come le strutture si specializzano passando da macro-generi a sotto-generi più specifici.

## 27.2 Narrativa: Fasci di Strutture Narrative, Temporalità e Focalizzazione

I testi narrativi, che costituiscono forse il genere più universale e antropologicamente fondamentale della produzione testuale umana, presentano complessità semantiche e strutturali profonde che hanno affascinato studiosi da Aristotele (con la Poetica) attraverso i formalisti russi (Propp, Shklovsky) fino alla narratologia strutturalista e post-strutturalista contemporanea (Genette, Bal, Chatman). La narrativa è caratterizzata da alcune proprietà definitoriali chiave che la distinguono da altri generi testuali.

### 27.2.1 Temporalità Narrativa: Fasci su Strutture Tempo-Trama

Una proprietà cruciale della narrativa è la distinzione tra due ordini temporali distinti ma intrecciati:

**Storia (story, fabula):** La sequenza cronologica "oggettiva" degli eventi come si suppone siano accaduti nel mondo narrativo. Evento  $E_1$  precede evento  $E_2$  se  $E_1$  avviene temporalmente prima di  $E_2$  nella realtà diegetica.

**Trama (plot, sjužet):** L'ordine e la modalità con cui gli eventi sono presentati, narrati, disposti nel testo. La narrazione può alterare drasticamente l'ordine cronologico attraverso flashback (analessi), flashforward (prolessi), ellissi temporali, sommari.

Questa dualità è fonte di effetti narrativi sofisticati: suspense (sappiamo che qualcosa è accaduto ma non ancora come), sorpresa (anacronia rivelazionale), profezia drammatica (prolessi che crea attesa), eccetera.

Modelliamo formalmente questa dualità attraverso due strutture tempo correlate da morfismo. Sia  $T\_storia$  una linea temporale (tipicamente homeomorfa a  $\mathbb{R}$  o un intervallo  $[0, T] \subseteq \mathbb{R}$ ) rappresentante il tempo diegetico. Sia  $T\_trama$  l'asse della progressione testuale (sequenza di frasi, capitoli, o unità narrative nella loro presentazione lineare nel testo).

Il fascio della storia  $F\_storia$  è definito su  $T\_storia$ :

$F\_storia(I) = \{\text{configurazioni eventuali } e: I \rightarrow \text{Eventi che assegnano a ogni istante } t \in I \subseteq T\_storia \text{ gli eventi che occorrono a quell'istante nella storia}\}$

Il fascio della trama  $F\_trama$  è definito su  $T\_trama$ :

$F\_trama(S) = \{\text{sequenze narrative } n: S \rightarrow \text{Rappresentazioni\_eventuali che assegnano a ogni posizione } s \in S \subseteq T\_trama \text{ la rappresentazione testuale (descrizione narrativa) presente a quella posizione nel testo}\}$

Il morfismo narrativo fondamentale è:

$\varphi_{\text{narrativo}}: F_{\text{trama}} \rightarrow F_{\text{storia}}$

che mappa rappresentazioni testuali agli eventi diegetici che rappresentano. Questo morfismo è generalmente non-iniettivo (lo stesso evento può essere narrato molteplici volte, da prospettive diverse) e non-surgettivo (alcuni eventi possono essere omessi, lasciati impliciti, o accadere "off-stage").

Le proprietà narratologiche classiche sono catturate attraverso proprietà di  $\varphi_{\text{narrativo}}$ :

**Ordine:** Confronto tra l'ordine di  $s_1 < s_2$  in  $T_{\text{trama}}$  e l'ordine temporale degli eventi corrispondenti  $\varphi(n(s_1))$  e  $\varphi(n(s_2))$  in  $T_{\text{storia}}$ .

- Narrativa lineare:  $\varphi$  preserva ordine
- Analessi (flashback):  $\varphi$  inverte ordine localmente ( $s_1 < s_2$  ma  $\text{tempo}(\varphi(n(s_1))) > \text{tempo}(\varphi(n(s_2)))$ )
- Prolessi (flashforward): simile ma anticipazione

**Durata:** Rapporto tra estensione temporale diegetica di eventi e "spazio" testuale dedicato.

- Scena:  $\text{durata\_testo} \approx \text{durata\_storia}$  (dialoghi tipicamente)
- Sommario:  $\text{durata\_testo} \ll \text{durata\_storia}$  (anni condensati in frasi)
- Pausa:  $\text{durata\_storia} = 0$  ma  $\text{durata\_testo} > 0$  (descrizioni statiche, riflessioni)
- Ellissi:  $\text{durata\_storia} > 0$  ma  $\text{durata\_testo} = 0$  (salti temporali non narrati)

**Frequenza:** Relazione tra numero di occorrenze diegetiche di evento e numero di narrazioni testuali.

- Singulativa: evento narrato una volta, accade una volta (1:1)
- Ripetitiva: evento narrato  $n$  volte, accade  $n$  volte ( $n:n$ )
- Iterativa: eventi accaduti  $n$  volte narrati una volta ("ogni mattina andava...") ( $n:1$ )
- Ripetizione narrativa: evento accaduto una volta narrato  $n$  volte ( $1:n$ )

Formalizziamo frequenza attraverso cardinalità delle fibre del morfismo  $\varphi$ . Per evento  $e \in \text{Storia}$ , la fibra  $\varphi^{-1}(e)$  è l'insieme delle posizioni testuali dove  $e$  è narrato. La cardinalità  $|\varphi^{-1}(e)|$  misura frequenza narrativa.

### 27.2.2 Focalizzazione: Fasci di Prospettive Percettive e Cognitive

La focalizzazione (Genette) riguarda attraverso quale "filtro" percettivo, cognitivo, ed epistemico gli eventi narrativi vengono presentati. Genette distingue:

**Focalizzazione zero (narratore onnisciente):** Il narratore sa più di qualunque personaggio, ha accesso completo a pensieri, sentimenti, eventi simultanei in locazioni distanti, futuro.

**Focalizzazione interna:** Eventi filtrati attraverso coscienza di personaggio specifico. Narratore sa solo ciò che il personaggio focalizzatore sa/percepisce/pensa.

- Fissa: stesso focalizzatore per tutta narrazione

- Variabile: cambia tra personaggi
- Multipla: stesso evento narrato da molteplici prospettive

**Focalizzazione esterna:** Narratore "oggettivo" che descrive solo comportamenti osservabili esternamente, senza accesso a interiorità.

Modelliamo focalizzazione attraverso fascio  $F_{\text{foc}}$  su spazio narrativo  $N \times P$  dove  $N$  sono posizioni narrative (punti in trama) e  $P$  sono personaggi potenziali focalizzatori (più il narratore come entità astratta).

$$F_{\text{foc}}(U \times V) = \{\text{funzioni } f: U \times V \rightarrow \text{Gradi\_accesso\_epistemico}\}$$

dove  $f(n, p)$  specifica il grado di accesso epistemico che il focalizzatore  $p$  ha a eventi/stati narrati in posizione  $n$ . Valori possono essere:

- Accesso\_completo (onnisciente)
- Accesso\_personale (solo ciò che  $p$  sa/percepisce)
- Accesso\_esterno (solo osservabili)
- Accesso\_nullo (evento oscurato alla focalizzazione)

Le mappe di restrizione modellano come la focalizzazione vincola l'informazione disponibile. Restringendo da  $U_{\text{generale}}$  a  $U_{\text{foc\_interna}}$  (regioni di testo con focalizzazione interna su personaggio  $p$ ), l'accesso epistemico è limitato:

$$p_{\{U_{\text{generale}}, U_{\text{foc\_interna}}\}}(f)(n) = f(n) \cap \text{Conoscenze}(p)$$

Solo informazioni accessibili a  $p$  sono rappresentabili nella narrazione focaled-through- $p$ .

### 27.2.3 Personaggi come Fasci di Tratti e Archi Trasformativi

I personaggi narrativi possono essere modellati come fasci che evolvono attraverso la progressione narrativa, accumulando tratti, subendo trasformazioni, sviluppando complessità psicologica.

Definiamo fascio dei personaggi  $F_{\text{char}}$  su asse temporale narrativo  $T_{\text{storia}}$ :

$$F_{\text{char}}(I) = \{\text{funzioni } c: I \rightarrow \text{Spazio\_tratti\_caratterologici che assegnano a ogni punto temporale } t \in I \subseteq T_{\text{storia}} \text{ la configurazione di tratti del personaggio a quell'istante}\}$$

Un personaggio "piatto" (Forster) corrisponde a sezione (quasi) costante:  $c(t_1) \approx c(t_2)$  per ogni  $t_1, t_2$ . Il personaggio non cambia, mantiene stessi tratti attraverso narrazione.

Un personaggio "rotondo" corrisponde a sezione variabile con arco trasformativo:  $c$  evolve in modo non-triviale, spesso mostrando crescita, cambiamento, rivelazione di complessità.

Le mappe di restrizione temporale  $p_{\{[0, T], [t_1, t_2]\}}$  per  $[t_1, t_2] \subseteq [0, T]$  modellano come percezione del personaggio si costruisce attraverso esposizione narrativa progressiva. Inizialmente ( $t$  vicino a 0), abbiamo informazione limitata:  $c|_{\{[0, \varepsilon]\}}$  potrebbe essere scheletrico. Accumulando narrazione, il ritratto si arricchisce:  $c|_{\{[0, T]\}}$  è completo.

### 27.2.4 Ostruzioni Narrative: Inaffidabilità e Contraddizioni

Un narratore inaffidabile (unreliable narrator) presenta versione degli eventi distorta, parziale, o contraddittoria. Classico esempio: "The Turn of the Screw" di Henry James, dove non è chiaro se gli eventi soprannaturali narrati siano reali o allucinazioni della narratrice instabile.

L'inaffidabilità genera ostruzioni coomologiche. Consideriamo ricoprimento  $\{U_i\}$  dello spazio narrativo dove  $U_i$  rappresenta segmenti testuali con focalizzazione su narratore. Le sezioni locali  $s_i \in F_{\text{eventi}}(U_i)$  rappresentano versione degli eventi secondo narratore in quel segmento.

Se il narratore è affidabile, le sezioni locali sono compatibili sulle sovrapposizioni:  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ . Possono essere incollate in versione globale coerente degli eventi.

Se il narratore è inaffidabile, le sezioni locali possono essere incompatibili:  $s_i|_{U_i \cap U_j} \neq s_j|_{U_i \cap U_j}$ . Il narratore contraddice se stesso. Non esiste sezione globale che estende tutte le versioni locali. L'ostruzione  $H^1(\text{Spazio\_narrativo}, F_{\text{eventi}}) \neq 0$  misura grado di incoerenza/inaffidabilità.

Il lettore deve ricostruire "vera storia" attraverso processo inferenziale complesso, filtrando distorsioni narrative. Questo può essere modellato come costruzione di fascio associato (sheafification) che risolve incompatibilità locali attraverso scelte interpretative che massimizzano coerenza globale.

## 27.3 Poesia: Fasci di Strutture Metriche, Figurative e Polisemiche

La poesia, genere antichissimo e transculturalmente universale, presenta caratteristiche semantiche e formali radicalmente distintive che la differenziano nettamente dalla prosa narrativa o espositiva. La densità semantica estrema, la centralità di figure retoriche (metafora, metonimia, sinestesia), la stratificazione di livelli interpretativi, la pregnanza fonica e ritmica, e la rottura sistematica di norme linguistiche standard rendono la poesia un oggetto privilegiato per teorizzazione semantica sofisticata.

### 27.3.1 Metri e Ritmi: Topologia delle Strutture Prosodiche

La poesia, almeno in molte tradizioni (occidentale, araba, sanscrita), è caratterizzata da organizzazione metrica rigorosa: pattern ricorrenti di sillabe accentate/non-accentate, lunghezza sillabica, pause cesurali, rime, che impongono vincoli formali stringenti sulla realizzazione linguistica.

Definiamo spazio metrico  $M$  come insieme di tutti i possibili pattern metrici. Per poesia accentuale-sillabica (tradizione inglese, italiana), un pattern metrico specifica:

- Metro base (giambo, troqueo, dattilo, anapesto, spondeo)
- Lunghezza verso (pentametro, esametro, settenario, endecasillabo)
- Schema rimico (ABAB, AABB, terza rima, rima baciata)

- Struttura strofica (sonetto, sestina, ballata)

La topologia su  $M$  riflette similarità metrica. Due metri  $m_1$  e  $m_2$  sono vicini se differiscono minimamente in struttura (es. pentametro giambico vs esametro giambico: stessa unità base, differente lunghezza).

Il fascio poetico  $F_{\text{poesia}}$  su  $M$  assegna a ogni metro (o famiglia metrica rappresentata da aperto  $U \subseteq M$ ) l'insieme dei testi poetici ammissibili:

$$F_{\text{poesia}}(U) = \{\text{poesie } p \text{ che conformano a qualche metro in } U\}$$

Le mappe di restrizione modellano specializzazione metrica. Restrignendo da  $U_{\text{generale}}$  (tutti metri accentuali-sillabici) a  $U_{\text{sonetto}}$  (solo schema sonetto), lo spazio delle poesie ammissibili si riduce drasticamente:

$$|F_{\text{poesia}}(U_{\text{generale}})| \gg |F_{\text{poesia}}(U_{\text{sonetto}})|$$

Vincoli metrici stringenti riducono produttività, forzando selezione lessicale e sintattica sofisticata per soddisfare sia vincoli semantici (esprimere contenuto desiderato) sia vincoli formali (conformare a metro).

### 27.3.2 Deviazioni e Licenze Poetiche: Trasformazioni Topologiche

La poesia sistematicamente devia da norme linguistiche standard attraverso licenze poetiche: inversioni sintattiche, ellissi radicali, neologismi, violazioni semantiche che creano figure retoriche.

Consideriamo inversione sintattica in italiano poetico:

Prosa standard: "Il poeta canta le glorie degli eroi antichi" Poesia (ipotetico): "Degli eroi antichi le glorie canta il poeta"

L'ordine è invertito rispetto a SVO canonico italiano per soddisfare metri o per enfasi retorica.

Modelliamo deviazioni come trasformazioni topologiche  $\tau_{\text{poetic}}: X_{\text{standard}} \rightarrow X_{\text{poetic}}$  dove  $X_{\text{standard}}$  è spazio linguistico standard (grammatica, lessico, sintassi ordinarie) e  $X_{\text{poetic}}$  è spazio ampliato che include forme poetiche deviant.

Il fascio linguistico standard  $F_{\text{standard}}$  vive su  $X_{\text{standard}}$ . La trasformazione  $\tau_{\text{poetic}}$  induce pullback:

$$\tau_{\text{poetic}}^*(F_{\text{standard}}) = F_{\text{poetic}}$$

che solleva strutture standard a strutture poetiche, permettendo forme che violerebbero vincoli in contesto non-poetico ma sono licenziate poeticamente.

Le mappe di restrizione modellano come licenze variano attraverso sotto-tradizioni poetiche. Nella poesia italiana petrarchesca ( $V_{\text{petrarchesca}} \subseteq U_{\text{italiana}}$ ), certe inversioni sono altamente convenzionalizzate e frequenti. Nella poesia moderna ( $V_{\text{moderna}} \subseteq U_{\text{italiana}}$ ),

inversioni possono essere meno frequenti (verso maggiore conformità con prosa), ma altri tipi di deviazioni (sintassi frammentata, ellissi estreme) diventano prominenti.

### 27.3.3 Metafora e Polisemia: Fasci Multi-Strato Interpretativi

La poesia è caratterizzata da densità semantica estrema: ogni parola, ogni immagine porta molteplici strati interpretativi. La metafora non è ornamento retorico superficiale ma meccanismo cognitivo centrale attraverso cui la poesia crea significato.

Consideriamo versi iniziali di "L'Infinito" di Leopardi:

"Sempre caro mi fu quest'ermo colle,  
E questa siepe, che da tanta parte  
Dell'ultimo orizzonte il guardo esclude."

"Siepe" funziona letteralmente (barriera fisica vegetale) ma anche metaforicamente: limite alla visione fisica si estende a metafora di limiti conoscitivi, confini dell'esperienza umana, tensione tra finito e infinito. "Esclude" il guardare ma paradossalmente rende possibile l'immaginazione dell'infinito oltre.

Definiamo fascio interpretativo stratificato  $F\_interp\_poetica$  con molteplici livelli:

$F\_interp\_poetica = F\_letterale \oplus F\_metaforico \oplus F\_simbolico \oplus F\_allegorico \oplus \dots$

dove ciascuna componente rappresenta livello interpretativo:

- $F\_letterale$ : significato denotazionale base (siepe = barriera vegetale)
- $F\_metaforico$ : mappature concettuali (siepe  $\rightarrow$  limite cognitivo)
- $F\_simbolico$ : associazioni culturali dense (siepe come simbolo di confine esistenziale)
- $F\_allegorico$ : interpretazioni strutturate sistematiche (testo intero come allegoria condizione umana)

Le mappe di restrizione tra livelli modellano relazioni interpretative. Il morfismo:

$\phi\_metaforizzazione: F\_letterale \rightarrow F\_metaforico$

mappa interpretazioni letterali a interpretazioni metaforiche basate su similarità percettive, analogie strutturali, associazioni culturali.

Questo morfismo è altamente contestuale: stesso elemento letterale può generare metafore radicalmente diverse in poesie diverse. "Rosa" letteralmente è fiore, ma metaforicamente può significare bellezza effimera (Shakespeare), amore passionale (romanticismo), purezza virginale (iconografia mariana), rivoluzione socialista (simbolo politico), eccetera. Il contesto poetico specifico (strofe circostanti, tradizione lirica, associazioni intertestuali) determina quale mappatura metaforica è attivata.

### 27.3.4 Ambiguità Irrisolubile e Ostruzioni Ermeneutiche

A differenza di prosa espositiva che mira a chiarezza e univocità, poesia spesso coltiva ambiguità deliberata, resistenza all'interpretazione univoca. Certe poesie sono famosamente "oscuri", ammettendo letture molteplici incompatibili che non possono essere risolte.

Consideriamo haiku giapponese classico:

"Furu ike ya  
Kawazu tobikomu  
Mizu no oto"

(Vecchio stagno /  
Una rana salta dentro /  
Rumore dell'acqua)

Questo haiku di Bashō è stato oggetto di interpretazioni critiche innumerevoli e spesso incompatibili. È meditazione zen sul suono nel silenzio? Commento sulla transitorietà? Pura descrizione fenomenologica senza "significato" aggiunto? Le letture sono legittime ma non componibili in interpretazione unica.

Modelliamo ambiguità poetica attraverso fallimento di condizione di fascio. Consideriamo ricoprimento  $\{U_i\}$  dello spazio interpretativo dove  $U_i$  rappresenta "scuola critica" o "tradizione ermeneutica"  $i$ -esima. Ciascuna scuola produce interpretazione locale  $s_i \in F_{\text{interpretazione}(U_i)}$ .

Per poesia con significato univoco risolvibile, le interpretazioni locali sarebbero compatibili sulle sovrapposizioni e potrebbero essere incollate in interpretazione globale consensuale. Per poesia genuinamente ambigua, le interpretazioni locali sono incompatibili:

$$s_{\text{formalista}}|_{\{U_{\text{formalista}} \cap U_{\text{storicista}}\}} \neq s_{\text{storicista}}|_{\{U_{\text{formalista}} \cap U_{\text{storicista}}\}}$$

La scuola formalista produce lettura che enfatizza strutture formali interne al testo, indipendenti da contesto storico. La scuola storicista produce lettura che enfatizza significato contestuale, riferimenti storico-culturali. Queste letture sono incommensurabili in punti cruciali.

L'ostruzione coomologica  $H^1(\text{Spazio\_interpretativo}, F_{\text{interpretazione}}) \neq 0$  quantifica questo pluralismo interpretativo irrisolvibile, misurando quanto le interpretazioni locali resistono all'unificazione globale.

## 27.4 Testi Scientifici: Fasci di Precisione Referenziale e Strutture Argomentative

I testi scientifici, paradigma di prosa espositiva razionale e obiettiva, presentano caratteristiche semantiche e pragmatiche distintive che li oppongono diametralmente alla poesia lirica in molteplici dimensioni. L'esplicitezza referenziale, la minimizzazione dell'ambiguità, l'impersonalità stilistica, la struttura argomentativa rigida, l'uso massiccio di terminologia tecnica standardizzata, e il commitment epistemico a verità fattuale piuttosto

che espressività emotiva o estetica configurano uno spazio discorsivo altamente specializzato.

### 27.4.1 Terminologia Tecnica: Fasci di Definizioni Precise e Restrizione Semantica

Una caratteristica saliente del discorso scientifico è l'uso pervasivo di terminologia tecnica dove termini ordinari del linguaggio naturale ricevono definizioni tecniche precise che restringono e stabilizzano il loro significato, eliminando vaghezza e polisemia.

Confrontiamo uso ordinario vs scientifico di "forza":

**Uso ordinario:** "Giovanni ha la forza di sopportare difficoltà" (forza = capacità psicologica, resilienza morale)

**Uso scientifico (fisica):** "La forza applicata al corpo è  $F = ma$ " (forza = grandezza vettoriale che causa accelerazione, definita precisamente da seconda legge Newton)

Il termine "forza" in contesto scientifico-fisico ha significato univoco, matematicamente definito, completamente disambiguato rispetto a usi metaforici, psicologici, morali ordinari.

Modelliamo questa restrizione semantica attraverso morfismo:

$\varphi_{\text{tecnicizzazione}}: F_{\text{ordinario}}(U) \rightarrow F_{\text{tecnico}}(U)$

che prende significati ordinari ambigui e polisemici e li mappa a significati tecnici precisi. Questo morfismo è altamente non-surgettivo: molti significati ordinari sono eliminati, solo un sottoinsieme preciso è ritenuto.

Per termine tecnico  $\tau$  in disciplina  $D$ , definiamo fascio di definizioni  $F_{\text{def}}(\tau, D)$ :

$F_{\text{def}}(\tau, D)(U) = \{\text{definizioni } \delta \text{ di } \tau \text{ accettate nella sotto-comunità scientifica } U \subseteq D\}$

In disciplina matura ben-stabilita,  $|F_{\text{def}}(\tau, D)(U)| = 1$  per la maggior parte  $U$ : esiste un'unica definizione consensuale standard. Questo riflette convergenza epistemica, standardizzazione terminologica attraverso manuali, consensus scientifici.

In discipline emergenti o in fase di rivoluzione (senso Kuhniano), possono coesistere molteplici definizioni incompatibili:  $|F_{\text{def}}(\tau, D_{\text{emergente}})(U)| > 1$ , riflettendo competizione tra paradigmi o scuole di pensiero.

Le mappe di restrizione temporale  $\rho_{\{[t_1, t_2], [t_3, t_4]\}}$  modellano evoluzione storica delle definizioni. Un termine tecnico può avere significato/definizione diversa in epoche scientifiche diverse. "Atomo" per Democrito (particella indivisibile speculativa) vs "atomo" per Dalton (unità chimica) vs "atomo" per Bohr (struttura nucleo-elettroni) vs "atomo" per meccanica quantistica (funzione d'onda in spazio di Hilbert) - sequenza di raffinamenti e ristrutturazioni.

### 27.4.2 Strutture Argomentative: Fasci di Catene Inferenziali



Gli articoli scientifici seguono strutture retoriche convenzionalizzate rigide:

**IMRAD** (Introduction, Methods, Results, and Discussion): Standard per articoli sperimentali

**Sequenza argomentativa:** Premesse  $\rightarrow$  Inferenze  $\rightarrow$  Conclusioni, con ogni passo giustificato esplicitamente

Definiamo fascio argomentativo  $F_{\text{arg}}$  su spazio testuale di articolo scientifico A:

$F_{\text{arg}}(U) = \{\text{catene inferenziali valide che collegano premesse a conclusioni nella sezione U del testo}\}$

Una catena inferenziale è sequenza:

$P_1, P_2, \dots, P_n \rightarrow C$

dove  $P_i$  sono premesse (osservazioni empiriche, assunzioni teoriche, risultati precedenti citati) e  $C$  è conclusione, tale che  $C$  segue logicamente/probabilisticamente da  $\{P_i\}$ .

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}: F_{\text{arg}}(U) \rightarrow F_{\text{arg}}(V)$  per  $V \subseteq U$  modellano come catene inferenziali si decompongono in sotto-argomenti. Un argomento globale complesso ( $U$  = intero articolo) è composizione di sotto-argomenti locali ( $V$  = singola sezione).

La coerenza argomentativa richiede che sotto-argomenti locali siano compatibili sulle sovrapposizioni e possano essere incollati:

$\text{Argomento\_locale\_Introduzione} \cap \text{Methods} \text{ compatibile con } \text{Argomento\_locale\_Methods} \cap \{\text{Intro} \cap \text{Methods}\}$

Se c'è incompatibilità (contraddizione tra premesse assunte in sezioni diverse, conclusioni di sotto-argomento A che contraddicono premesse di sotto-argomento B), l'articolo è logicamente incoerente e sarà rifiutato in peer review.

L'ostruzione  $H^1(\text{Articolo}, F_{\text{arg}})$  misura incoerenza argomentativa globale: se non-triviale, segnala problemi strutturali nell'argomento complessivo.

### 27.4.3 Citazioni e Intertestualità: Fasci di Referenze Cross-Testuali

Il discorso scientifico è intensamente intertestuale, con citazioni esplicite di letteratura precedente che costituiscono parte essenziale della giustificazione epistemica. Un'affermazione scientifica è credibile in parte perché si basa su risultati precedenti pubblicati, citati esplicitamente.

Definiamo fascio citazionale  $F_{\text{cit}}$  su corpus scientifico C (insieme di tutti articoli in un campo):

$F_{\text{cit}}(U) = \{\text{relazioni citazionali } R \subseteq U \times U \text{ dove } (a, b) \in R \text{ significa "articolo a cita articolo b"}\}$

Questo induce grafo diretto (rete citazionale) dove nodi sono articoli e archi sono citazioni. Proprietà topologiche di questo grafo rivelano struttura del campo:

- Articoli altamente citati (high in-degree) sono "hubs", lavori seminali o reviews autorevoli
- Clustering identifica sotto-comunità o specializzazioni
- Percorsi lunghi nel grafo tracciano linee di sviluppo storico idee

Le mappe di restrizione temporale modellano evoluzione della rete. Restrignendo a pubblicazioni recenti ( $V_{recente} \subseteq C_{totale}$ ), la rete citazionale cambia: vecchi articoli potrebbero non essere più citati attivamente (obsolescenza), nuovi hub emergono.

#### 27.4.4 Modalità Epistemica e Hedging: Fasci di Commitment Variabile

Contrariamente a stereotipo di scienza come assertoria categorica, il discorso scientifico effettivo è pieno di hedging (mitigazione epistemica): espressioni che attenuano commitment alla verità delle affermazioni.

Esempi: "I risultati suggeriscono che...", "È possibile che...", "Sembra indicare...", "Probabilmente...", "In una certa misura..."

Queste espressioni segnalano incertezza, cautela epistemica, riconoscimento di limitazioni evidenziali.

Definiamo fascio modale epistemico  $F_{modal}$  su testo scientifico:

$F_{modal}(U) = \{\text{assegnazioni } \mu: U \rightarrow [0,1] \text{ che specificano il grado di commitment epistemico per affermazioni nella regione testuale } U\}$

Valori di  $\mu$ :

- $\mu(s) = 1$ : affermazione  $s$  è asserita categoricamente (certezza massima)
- $\mu(s) = 0,8$ : affermazione  $s$  è altamente probabile ma non certa
- $\mu(s) = 0,5$ : affermazione  $s$  è speculativa, ipotetica
- $\mu(s) < 0,5$ : affermazione  $s$  è dubitata o presentata come alternativa meno probabile

Le mappe di restrizione modellano come commitment varia attraverso sezioni. Nella sezione Risultati ( $V_{results} \subseteq U_{articolo}$ ), commitment è tipicamente alto: i dati osservati sono asseriti con certezza. Nella sezione Discussione ( $V_{discussion}$ ), commitment è più basso: interpretazioni sono speculative, alternative sono considerate.

### 27.5 Dialoghi: Fasci di Turn-Taking, Adiacenza e Riparazioni Conversazionali

I dialoghi, forme prototipiche di linguaggio in uso interattivo, presentano strutture semantiche e pragmatiche emergenti dall'interazione tra partecipanti multipli. A differenza di testi monologici (narrativa, poesia, testi scientifici scritti), i dialoghi sono co-costruiti

dinamicamente attraverso contributi alternati (turn-taking), risposte sequenzialmente organizzate (adjacency pairs), negoziazioni di significato, riparazioni di malintesi.

### 27.5.1 Struttura di Turn-Taking: Fasci su Sequenze Interazionali

L'analisi conversazionale (Conversation Analysis) ha identificato sistematicità profonda nell'organizzazione sequenziale del parlato spontaneo. I parlanti alternano turni (turns) seguendo pattern prevedibili ma flessibili, minimizzando sovrapposizioni (overlaps) e silenzi (gaps).

Definiamo spazio conversazionale  $C$  come sequenza di posizioni di turn:

$$C = \{T_1, T_2, T_3, \dots, T_n\}$$

dove  $T_i$  rappresenta i-esimo turno. Ciascun turno ha struttura interna (unità di turn-constructural, punti di rilevanza transizionale) ma anche ruolo sequenziale nel dialogo complessivo.

Il fascio strutturale  $F\_struct(C)$  assegna a sottosequenze di turni  $\{T_i, \dots, T_n\} \subseteq C$  strutture interazionali:

$F\_struct(\{T_i, \dots, T_n\}) = \{\text{configurazioni strutturali come adjacency pairs, inserzioni, sequenze espansive}\}$

**Adjacency pairs** (coppie adiacenti) sono unità fondamentali: due turni consecutivi di parlanti diversi che formano unità funzionale:

- Domanda → Risposta
- Saluto → Contro-saluto
- Richiesta → Accettazione/Rifiuto
- Offerta → Accettazione/Declino
- Lamento → Scusa/Giustificazione

La prima parte (First Pair Part, FPP) crea aspettativa normativa per seconda parte (Second Pair Part, SPP) appropriata. L'assenza di SPP attesa è marcata, richiede accounting.

Modelliamo adjacency pairs come elementi del fascio:

$$(FPP_i, SPP_{i+1}) \in F\_struct(\{T_i, T_{i+1}\})$$

con vincolo di adiacenza temporale (SPP segue immediatamente FPP, modulo inserzioni brevi), e vincolo di appropriate (SPP è del tipo appropriato per FPP).

Le mappe di restrizione modellano come strutture locali si compongono in strutture globali. Una conversazione completa ( $U$  = intera sequenza  $C$ ) può decomporsi in molteplici adjacency pairs e sequenze più complesse (pre-sequences, insertion sequences, post-expansions).

### 27.5.2 Riparazioni: Fasci di Correzioni e Mantenimento Intersoggettività

Le conversazioni spontanee sono piene di problemi: malintesi, errori di produzione, referenze ambigue. I partecipanti usano meccanismi di riparazione (repair) sistematici per mantenere intersoggettività.

Tipi di riparazione:

**Self-initiated self-repair:** Parlante corregge se stesso spontaneamente ("Ho visto Gio-Maria ieri")

**Other-initiated self-repair:** Interlocutore segnala problema, parlante originale corregge

A: "L'ho visto mercoledì"

B: "Mercoledì?"

A: "No scusa, giovedì"

**Self-initiated other-repair:** Parlante segnala problema nel proprio enunciato, interlocutore fornisce correzione (raro)

**Other-initiated other-repair:** Interlocutore identifica problema e corregge (tipicamente evitato come face-threatening)

Definiamo fascio di riparazione  $F_{\text{repair}}$  su sequenze problematiche:

$F_{\text{repair}}(U) = \{\text{sequenze di riparazione } r: U_{\text{problema}} \rightarrow U_{\text{risolto}} \text{ che trasformano enunciati problematici in versioni riparate}\}$

Una sequenza di riparazione è morfismo:

$\rho_{\text{repair}}: F_{\text{produzioni}}(U_{\text{problema}}) \rightarrow F_{\text{produzioni}}(U_{\text{risolto}})$

che mappa produzioni deviant/problematiche a versioni corrette/disambiguate.

Le mappe di restrizione modellano preferenze culturali e contestuali per tipi di riparazione. In contesti formali ( $V_{\text{formale}} \subseteq U_{\text{conversazionale}}$ ), other-repair esplicito potrebbe essere più tollerato (correggere errori fattuali in presentazione). In contesti intimi ( $V_{\text{intimo}}$ ), self-repair è fortemente preferito (evitare face-threat di correzione esplicita).

### 27.5.3 Question Under Discussion (QUD): Fasci di Rilevanza Conversazionale

Il concetto di Question Under Discussion (Roberts 2012) propone che ogni conversazione è organizzata attorno a questioni (esplicithe o implicite) che guidano le contribuzioni. Una questione  $Q$  è "sotto discussione" se le contribuzioni sono orientate a risponderla, affinarla, o decomporla in sotto-questioni.

Definiamo fascio QUD  $F_{\text{qud}}$  su progressione conversazionale:

$F_{\text{qud}}(U) = \{\text{stack di questioni } Q = [Q_1, Q_2, \dots, Q_n] \text{ attive nella porzione conversazionale } U, \text{ ordinate per prominenza/urgenza}\}$

La QUD evolve dinamicamente:

- Nuove questioni sono introdotte (push su stack): A pone domanda esplicita, apre nuova QUD
- Questioni sono risolte (pop da stack): Risposta soddisfacente chiude QUD
- Questioni sono raffinate (modifica top dello stack): Chiarificazioni trasformano QUD

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{[\tau_i, \tau_{\square}], [\tau_i, \tau_{\square}]\}}$  per  $[\tau_i, \tau_{\square}] \subseteq [\tau_i, \tau_{\square}]$  modellano come QUD si focalizza. Su sequenza conversazionale lunga, molteplici QUD possono essere attive simultaneamente (multi-threading conversazionale). Restrungendo a sotto-sequenza focalizzata, tipicamente una QUD domina.

#### 27.5.4 Implicature Conversazionali Dialogiche: Fasci di Inferenze Cooperativi

Abbiamo discusso implicature conversazionali nel contesto generale. Nei dialoghi, le implicature hanno carattere speciale perché sono co-costruite interattivamente. L'implicatura generata da turno di A dipende essenzialmente da come B risponde, e la risposta di B può confermare, rifiutare, o rinegoziare l'implicatura.

Esempio:

A: "Hai finito il report?"

B: "Il mio computer è crashato ieri"

B non risponde direttamente alla domanda (violazione apparente di massima di Quantità/Relazione). Ma A inferisce implicatura: "No, non ho finito il report, perché il computer è crashato (che ha impedito il lavoro)".

Se A accetta questa implicatura senza challenge, diventa parte del common ground. Ma A potrebbe challenge:

A: "Ok, ma avresti dovuto fare backup / lavorare altrove"

Questo challenge rinegozia l'implicatura, suggerendo che il crash non è giustificazione sufficiente.

Definiamo fascio implicaturale dialogico  $F\_implic\_dial$  su spazio turn-sequenziale:

$F\_implic\_dial(\tau_i) = \{\text{implicature potenziali generate da turno } \tau_i, \text{ condizionali su accettazione in turno successivo } \tau_{i+1}\}$

Le implicature sono provvisorie fino a ratifica interattiva. La mappa:

$\rho\_ratifica: F\_implic\_dial(\tau_i) \rightarrow F\_common\_ground(\tau_{i+1})$

mappa implicature potenziali a common ground aggiornato solo se turno successivo le accetta (esplicitamente o tacitamente).

Se turno successivo challenge o rifiuta, l'implicatura non entra in common ground, richiede rinegoziazione:

$p\_challenge: F\_implic\_dial(\tau_i) \rightarrow F\_dispute(\tau_{i+1}, \dots, \tau_{i+\square})$

che innesca sequenza di dispute/clarification per risolvere disaccordo.

## Capitolo 28: Casi Patologici - Afasia, Disturbi Pragmatici e Rotture del Sistema Linguistico

### 28.1 Introduzione: Patologie Linguistiche come Sonde nel Sistema Semantico

Lo studio sistematico delle patologie linguistiche, dei disturbi della comunicazione, e delle rotture selettive delle capacità linguistiche causate da lesioni cerebrali, malattie neurodegenerative, o disturbi dello sviluppo costituisce una finestra metodologica privilegiata, forse insostituibile, sulla struttura funzionale e neurale del sistema linguistico umano. Il principio metodologico fondamentale, articolato esplicitamente già da Paul Broca nel diciannovesimo secolo e raffinato attraverso oltre un secolo e mezzo di neuropsicologia del linguaggio, è che studiando come il sistema linguistico si rompe, si frammenta, si dissocia selettivamente in presenza di lesioni specifiche, possiamo inferire la struttura modulare normale, le componenti funzionalmente distinte, le architetture di processamento che sottostanno alla competenza linguistica intatta.

Se una lesione cerebrale in regione X produce deficit selettivo nella capacità  $C_1$  ma preserva capacità  $C_2$ , questo suggerisce che  $C_1$  e  $C_2$  sono funzionalmente e neuralmente dissociabili, implementate in substrati almeno parzialmente distinti. Se una lesione produce pattern di errori che rispettano certe regolarità linguistiche strutturali ma ne violano altre, questo rivela la

granularità delle rappresentazioni linguistiche e le operazioni computazionali che operano su di esse.

La teoria dei fasci semantici offre un framework formale particolarmente adatto, forse uniquely suited, per modellare le dissociazioni e le frammentazioni che caratterizzano le patologie linguistiche. L'idea centrale è che un sistema linguistico normale, intatto, corrisponde a un fascio  $F\_lingua$  ben-formato, che soddisfa pienamente le condizioni di compatibilità locale e incollamento globale su uno spazio contestuale ricco e complesso X. Le patologie linguistiche possono essere concettualizzate come:

1. **Restrizioni dello spazio contestuale:** Lesioni che eliminano certe regioni dello spazio X, rendendo alcuni contesti inaccessibili
2. **Degradazione locale del fascio:** Sezioni del fascio su certi aperti diventano impoverite, distorte, o completamente assenti
3. **Rottura delle mappe di restrizione:** Le operazioni  $p_{\{U,V\}}$  che garantiscono coerenza tra livelli non funzionano più correttamente
4. **Ostruzioni coomologiche patologiche:** Emergono ostruzioni nuove all'incollamento che nel sistema normale erano assenti

Questa prospettiva permette di modellare formalmente e precisamente fenomeni clinici complessi come dissociazioni doppiamente dissociate, deficit selettivi a livelli specifici di rappresentazione, preservazioni isole di funzionalità in contesti di deficit globale, e pattern di recovery e compensazione.

## 28.2 Afasie: Tassonomia Classica e Modellazione attraverso Fasci Frammentati

Le afasie sono disturbi acquisiti del linguaggio causati tipicamente da lesioni cerebrali focali (ictus, traumi cranici, tumori) che colpiscono regioni corticali e subcorticali dell'emisfero sinistro (dominante per linguaggio in circa 95% dei destrimani e 70% dei mancini). La tradizione neurologica classica, iniziata con Broca (1861) e Wernicke (1874) e sistematizzata da Lichtheim, Geschwind e altri, distingue molteplici sindromi afasiche con pattern caratteristici di deficit e preservazioni.

### 28.2.1 Afasia di Broca: Degradazione del Fascio Sintattico-Produttivo

L'afasia di Broca (non-fluente, motoria, espressiva) è caratterizzata da pattern distintivo:

**Produzione linguistica:** Severamente compromessa. Eloquio lento, laborioso, telegrafico. Frasi brevi, semplici, prive di elementi grammaticali funzionali (articoli, preposizioni, morfologia flessiva). Prevalenza di sostantivi e verbi all'infinito.

Esempio di produzione tipica di paziente con afasia di Broca, descrivendo immagine di bambino che ruba biscotti mentre madre lava piatti:

"Bambino... biscotti... cadere... madre... acqua... ah... sì"

(Invece di: "Il bambino sta rubando i biscotti dal barattolo mentre la madre lava i piatti e l'acqua trabocca dal lavandino")

**Comprensione:** Relativamente preservata per frasi semplici canoniche, ma deficit emergono con frasi sintatticamente complesse (passive, relative center-embedded).

**Ripetizione:** Compromessa parallelamente alla produzione spontanea.

**Lesione tipica:** Porzione posteriore del giro frontale inferiore sinistro (area di Broca, BA 44/45) e regioni adiacenti.

Modelliamo l'afasia di Broca come degradazione selettiva del fascio sintattico-produttivo. Nel sistema normale, definiamo:

$F\_sintassi\_prod(U) = \{strutture\ sintattiche\ generabili\ produttivamente\ nel\ contesto\ U\}$

Questo fascio è ricco, contenente strutture semplici (SVO canoniche) e complesse (passive, relative, topicalizzazioni, embedded clauses molteplici livelli).

Nell'afasia di Broca, la lesione induce restrizione drammatica:

$$F_{\text{sintassi\_prod}}^{\{\text{Broca}\}}(U) \subset F_{\text{sintassi\_prod}}^{\{\text{normale}\}}(U)$$

dove  $F_{\text{sintassi\_prod}}^{\{\text{Broca}\}}$  contiene solo sottoclasse limitata di strutture:

- Frasi semplici mono-clausali
- Ordine canonico (SVO in italiano/inglese)
- Assenza o deficit morfologia flessiva (agrammatismo)
- Assenza morfologia funzionale (articoli, preposizioni, ausiliari)

Formalmente, possiamo pensare questo come morfismo di restrizione patologica:

$$\pi_{\text{lesione}}: F_{\text{sintassi}}^{\{\text{normale}\}} \rightarrow F_{\text{sintassi}}^{\{\text{Broca}\}}$$

che elimina sezioni corrispondenti a strutture complesse. Il kernel di  $\pi_{\text{lesione}}$  (elementi mappati a zero, ovvero persi completamente) include:

$\text{Ker}(\pi_{\text{lesione}}) = \{\text{strutture passive, relative embeddate, topicalizzazioni, morfologia flessiva complessa}\}$

Le mappe di restrizione contestuale sono preservate ma operano su fascio impoverito. La coerenza locale rimane (le poche strutture producibili sono grammaticalmente corrette e coerenti), ma la ricchezza globale è drasticamente ridotta.

Crucialmente, il fascio comprensivo  $F_{\text{comprensione}}^{\{\text{Broca}\}}$  è meno compromesso:

$$F_{\text{comprensione}}^{\{\text{Broca}\}}(U) \approx F_{\text{comprensione}}^{\{\text{normale}\}}(U) \text{ per } U \text{ semplici}$$

Questo crea dissociazione produzione-comprensione, modellabile come:

$$\pi_{\text{prod}}(F) \neq \pi_{\text{compr}}(F) \text{ dopo lesione}$$

dove  $\pi_{\text{prod}}$  e  $\pi_{\text{compr}}$  sono proiezioni sui sottosistemi produttivo e comprensivo.

### 28.2.2 Afasia di Wernicke: Rottura del Fascio Lessicale-Semantico

L'afasia di Wernicke (fluente, sensoriale, recettiva) presenta pattern quasi opposto a Broca:

**Produzione:** Fluente, abbondante, sintatticamente ben-formata (prosody normale, morfologia preservata), ma semanticamente vuota o deviante. Parafasie semantiche frequenti (sostituzioni di parole correlate semanticamente: "forchetta" → "cucchiaino"), parafasie fonologiche (distorsioni fonologiche: "elefante" → "efelante"), neologismi (parole inventate: "tranella", "spriccio").

Esempio: "Bene, sto stando qui e voglio dirvi che questo accade quando succedono queste cose quando si fa questo tipo di lavoro per migliorare, in altre parole, voglio essere sicuro di quando si cominciano a fendere quelle cose, cose che vanno fatte per il benedidio prima che si faccia la strega."

(Jargon afasico: sintatticamente fluente ma semanticamente incoerente)



**Comprensione:** Severamente compromessa. Paziente sembra non capire discorso altrui, domande, istruzioni.

**Ripetizione:** Compromessa.

**Consapevolezza del deficit:** Tipicamente assente o ridotta (anosognosia). Paziente non si rende conto di produrre discorso non-sense.

**Lesione tipica:** Porzione posteriore del giro temporale superiore sinistro (area di Wernicke, BA 22).

Modelliamo Wernicke come rottura del fascio lessicale-semantic. Il fascio  $F_{\text{lessico-semantic}}$  normalmente mappa forme fonologiche a significati stabili:

$F_{\text{lessico-semantic}}(U)$ :  $\text{Forme}_{\text{fonologiche}} \rightarrow \text{Significati}$

Nell'afasia di Wernicke, questa mappa è severamente disturbata. Le sezioni  $s \in F_{\text{lessico-semantic}}^{\{Wernicke\}}(U)$  sono:

- Instabili: stessa forma fonologica può mappare a significati diversi in occorrenze diverse (instabilità referenziale)
- Incomplete: molte forme non hanno significati associati stabili (parafasie semantiche riflettono sostituzione random di vicini semantici)
- Contaminate da intrusioni: forme fonologicamente o semanticamente correlate interferiscono (blending, intrusione)

Le mappe di restrizione sono compromesse:

$\rho_{\{U,V\}^{\{Wernicke\}}}: F_{\text{lessico-semantic}}^{\{Wernicke\}}(U) \rightarrow F_{\text{lessico-semantic}}^{\{Wernicke\}}(V)$

non preservano identità referenziale stabile. Restringendo da contesto  $U$  a sottocontesto  $V$ , i referenti possono shift imprevedibilmente.

Crucialmente, il fascio sintattico-produttivo  $F_{\text{sintassi}}^{\{Wernicke\}}$  è relativamente preservato:

$F_{\text{sintassi}}^{\{Wernicke\}}(U) \approx F_{\text{sintassi}}^{\{\text{normale}\}}(U)$

Le strutture sintattiche complesse, morfologia, prosody sono intatte. Il problema è che queste strutture sintattiche corrette sono riempite con lessico semanticamente inappropriato o vuoto. Formalmente:

$F_{\text{produzione}}^{\{Wernicke\}} = F_{\text{sintassi}}^{\{\text{preservata}\}} \otimes F_{\text{lessico-semantic}}^{\{\text{degradato}\}}$

dove  $\otimes$  è una composizione che combina struttura sintattica (preservata) con contenuto lessicale (degradato), producendo output fluente ma vuoto.

### 28.2.3 Afasia di Conduzione: Ostruzione tra Fonologia e Produzione

L'afasia di conduzione presenta pattern interessante:

**Produzione spontanea:** Relativamente fluente, comprensibile, con parafasie fonologiche (errori di suono).

**Comprensione:** Buona.

**Ripetizione:** Severamente compromessa (deficit sproporzionato rispetto a produzione spontanea e comprensione).

**Lesione tipica:** Fascicolo arcuato (connessione white matter tra aree temporali e frontali) o giro sopramarginale.

Modelliamo conduzione come ostruzione nella connessione tra fasci. Il sistema normale ha morfismo di connessione:

$\varphi_{\text{arcuato}}: F_{\text{percettivo-fonologico}} \rightarrow F_{\text{produttivo-articolatorio}}$

che permette ripetizione: input acustico-percettivo è mappato a rappresentazioni fonologiche che guidano produzione articolatoria.

Nell'afasia di conduzione,  $\varphi_{\text{arcuato}}$  è danneggiato:

$\varphi_{\text{arcuato}}^{\{\text{conduzione}\}}: F_{\text{percettivo}} \rightarrow F_{\text{produttivo}}$  è parziale, distorto, rumoroso

La ripetizione richiede passaggio diretto attraverso  $\varphi_{\text{arcuato}}$ , quindi è massimamente compromessa. Ma produzione spontanea può bypassare  $\varphi_{\text{arcuato}}$  accedendo a rappresentazioni semantiche:

Produzione\_spontanea:  $F_{\text{semantico}} \rightarrow F_{\text{lessico}} \rightarrow F_{\text{fonologico}} \rightarrow F_{\text{articolatorio}}$

Questa via alternativa è preservata, spiegando dissociazione ripetizione << produzione spontanea.

Formalmente, l'ostruzione è coomologica. Consideriamo diagramma commutativo che dovrebbe valere nel sistema normale:

$F_{\text{percettivo}} \xrightarrow{\varphi_{\text{arcuato}}} F_{\text{produttivo}}$

|   |   |
|---|---|
|   |   |
| v | v |

$F_{\text{semantico}} \xrightarrow{\varphi_{\text{concettuale}}} F_{\text{articolatorio}}$

Nell'afasia di conduzione, il quadrato non commuta più:

$\varphi_{\text{concettuale}} \circ \pi_{\text{percettivo}} \neq \pi_{\text{produttivo}} \circ \varphi_{\text{arcuato}}$

dove  $\pi$  sono proiezioni verso livello semantico. Questa non-commutatività è l'ostruzione che impedisce ripetizione fluente.

#### 28.2.4 Afasia Transcorticali: Isole di Preservazione e Disconnessioni Selettive

Le afasie transcorticali (motoria, sensoriale, mista) sono caratterizzate da preservazione sorprendente della ripetizione nonostante deficit severi in produzione spontanea (transcorticale motoria) o comprensione (transcorticale sensoriale).

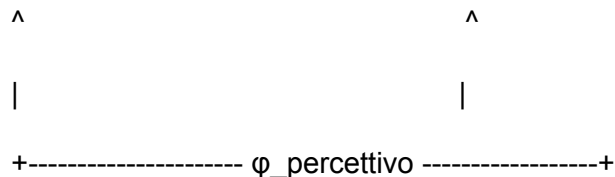
**Afasia Transcorticale Motoria:** Pattern simile a Broca (produzione non-fluente, agrammatica) MA ripetizione preservata. Il paziente può ripetere frasi complesse che non potrebbe generare spontaneamente.

**Afasia Transcorticale Sensoriale:** Pattern simile a Wernicke (comprensione severa compromessa, produzione fluente ma vuota semanticamente) MA ripetizione preservata.

Modelliamo queste come disconnessioni selettive tra fascio semantico-concettuale e fasci linguistici periferici (fonologico, lessicale), mentre connessioni interne tra fasci linguistici periferici restano intatte.

Sistema normale:

F\_concetti <----> F\_semantico <----> F\_lessico <----> F\_fonologia <----> F\_articolazione



Transcorticale motoria: Connessione  $F_{\text{semantico}} \rightarrow F_{\text{lessico}}$ -produttivo è danneggiata (produzione spontanea compromessa), ma via periferica  $F_{\text{percettivo}} \rightarrow F_{\text{fonologia}} \rightarrow F_{\text{articolazione}}$  è preservata (ripetizione intatta).

Formalmente:

$\phi_{\text{semantico}} \rightarrow \text{lessico}^{\{\text{TC-motoria}\}}$  è degradato o assente  
 $\phi_{\text{percettivo}} \rightarrow \text{articolatorio}^{\{\text{TC-motoria}\}}$  è preservato

Transcorticale sensoriale: Connessione  $F_{\text{percettivo-lessicale}} \rightarrow F_{\text{semantico}}$  è danneggiata (comprensione compromessa), ma ripetizione procede via route periferica.

Queste disconnessioni creano fasci parzialmente disconnessi: isole di funzionalità isolate dal sistema semantico centrale ma internamente coerenti.

## 28.3 Disturbi Pragmatici: Rotture nelle Mappe Contestuali e Inferenze Sociali

Oltre alle afasie classiche che compromettono fonologia, lessico, sintassi, esistono disturbi che colpiscono selettivamente il livello pragmatico: l'uso appropriato del linguaggio in contesto sociale, la comprensione di intenti comunicativi, la capacità di inferire implicature, la sensibilità a norme conversazionali e sociali.

### 28.3.1 Disturbo Pragmatico del Linguaggio (Pragmatic Language Impairment, PLI)

Il PLI è caratterizzato da deficit pragmatici in assenza di deficit significativi in grammatica o vocabolario:

**Difficoltà con implicature conversazionali:** Interpretazione letterale eccessiva, mancata inferenza di significati impliciti.

Esempio: A: "Sai che ora è?" Risposta tipica: "Sì" (interpretazione letterale della domanda, mancanza di inferenza che A sta chiedendo l'ora come richiesta indiretta) Risposta appropriata attesa: "Sono le tre e venti"

**Difficoltà con ironia e sarcasmo:** Interpretazione letterale di enunciati ironici che contraddicono il significato inteso.

**Problemi di turn-taking:** Interruzioni inappropriate, failure nel riconoscere punti di transizione rilevanti, monologhi eccessivi.

**Deficit nella teoria della mente:** Difficoltà nell'inferire stati mentali (credenze, intenzioni, conoscenze) di interlocutori.

Modelliamo PLI come degradazione del fascio di mappe contestuali. Nel sistema normale:

$F_{\text{pragmatico}}(U) = \{\text{interpretazioni pragmatiche appropriate per contesto } U, \text{ generate attraverso inferenze conversazionali}\}$

Il morfismo inferenziale:

$\varphi_{\text{inferenza}}: F_{\text{letterale}} \times F_{\text{contesto}} \rightarrow F_{\text{pragmatico}}$

mappa significati letterali + informazione contestuale a interpretazioni pragmatiche arricchite (con implicature, indirect speech acts, ecc.).

Nel PLI,  $\varphi_{\text{inferenza}}$  è compromesso:

$\varphi_{\text{inferenza}}^{\{\text{PLI}\}}: F_{\text{letterale}} \times F_{\text{contesto}} \rightarrow F_{\text{pragmatico}}$

produce output impoverito, spesso limitato a interpretazioni letterali:

$\varphi_{\text{inferenza}}^{\{\text{PLI}\}}(s_{\text{letterale}}, c) \approx s_{\text{letterale}}$  per molti  $c$

Il paziente "vede" il significato letterale ma fallisce nell'arricchirlo pragmaticamente anche quando contesto  $c$  fornisce indizi ricchi per inferenze.

Le mappe di restrizione contestuale sono particolarmente problematiche:

$$\rho_{\{U_{\text{generale}}, U_{\text{specifico}}\}^{\{PLI\}}}: F_{\text{pragmatico}}^{\{PLI\}}(U_{\text{generale}}) \rightarrow F_{\text{pragmatico}}^{\{PLI\}}(U_{\text{specifico}})$$

Nel sistema normale, specializzare contesto ( $U \rightarrow V$  più specifico) raffina interpretazioni pragmatiche, aggiungendo vincoli. Nel PLI, questa specializzazione non opera correttamente: il paziente non usa vincoli contestuali per disambiguare o arricchire.

### 28.3.2 Disturbi dello Spettro Autistico (ASD): Rigidità Contestuale e Letteralismo

L'autismo è caratterizzato da deficit sociali e comunicativi pervasivi, con pattern linguistici specifici:

**Letteralismo:** Interpretazione rigidamente letterale di espressioni idiomatiche, metafore, frasi fatte.

Esempio: "Piove a catinelle" interpretato come catini che cadono dal cielo (invece di pioggia intensa).

**Deficit nella teoria della mente:** Difficoltà nell'attribuzione di stati mentali a altri, impattando pragmatica (non inferire intenzioni comunicative, credenze false dell'interlocutore).

**Ecolalia:** Ripetizione letterale di enunciati altrui, spesso non-comunicativa.

**Interessi ristretti e comportamento ripetitivo:** Può manifestarsi linguisticamente come monologhi su topic preferito ignorando interesse interlocutore.

Modelliamo ASD come rigidità estrema del fascio contestuale. Lo spazio contestuale  $X_{\text{ASD}}$  è topologicamente più frammentato, meno connesso del normale:

$$X_{\text{ASD}} = X_1^{\{\text{rigido}\}} \sqcup X_2^{\{\text{rigido}\}} \sqcup X_3^{\{\text{rigido}\}} \sqcup \dots$$

dove ciascuna componente  $X_i^{\{\text{rigido}\}}$  corrisponde a un contesto o script altamente specifico e rigido, ma con scarse connessioni topologiche tra componenti.

Nel sistema normale, lo spazio contestuale è altamente connesso, permettendo generalizzazioni e transfer flessibili di pattern linguistici tra contesti correlati. Nell'ASD, questa connessione è ridotta: pattern appresi in contesto  $X_i$  non generalizzano facilmente a  $X_j$  anche se topologicamente vicini nel sistema normale.

Le mappe di restrizione mostrano iper-specificità:

$$\rho_{\{U, U \cap V\}^{\{\text{ASD}\}}}: F(U) \rightarrow F(U \cap V)$$

Restringere a contesto più specifico non solo specializza interpretazioni (come nel sistema normale) ma può rendere irrecuperabile conoscenza non specificamente associata a quel contesto preciso.

Il letteralismo emerge da fallimento della metaforizzazione. Il morfismo:

$$\phi_{\text{metafora}}: F_{\text{letterale}} \rightarrow F_{\text{metaforico}}$$

che nel sistema normale trasforma interpretazioni letterali in metaforiche basate su similarità strutturali, è compromesso in ASD:

$$\phi_{\text{metafora}}^{\{\text{ASD}\}}(s_{\text{letterale}}) \approx s_{\text{letterale}}$$

Le sezioni letterali non vengono trasformate metaforicamente, risultando in interpretazione rigidamente letterale anche quando contesto pragmatico suggerisce lettura metaforica.

### 28.3.3 Demenza Semantica: Erosione Progressiva del Fascio Lessicale

La demenza semantica (variante temporale di demenza frontotemporale) è caratterizzata da deterioramento progressivo e selettivo della memoria semantica (conoscenze su significati di parole, concetti, oggetti) mentre altre funzioni cognitive (memoria episodica, sintassi, fonologia, abilità visuo-spaziali) sono relativamente preservate nelle fasi iniziali.

#### Pattern clinico:

- Anomia severa progressiva (difficoltà a recuperare parole, specialmente nomi)
- Perdita di conoscenza semantica su concetti (non sanno più cos'è un "canguro", "violino")
- Comprensione delle parole progressivamente degradata
- Produzione fluente sintatticamente ma semanticamente vuota
- Deficit nella recognizione di oggetti, volti (associagnosia)
- Preservazione di memoria episodica autobiografica e abilità pratiche

Esempio: Paziente mostrato immagine di zebra. Stadio iniziale: "Uhm... è... un animale... con strisce?" Stadio medio: "Non so, un animale?" Stadio avanzato: "Non so cos'è"

Modelliamo demenza semantica come erosione temporale progressiva del fascio semantico. Definiamo evoluzione temporale:

$$F_{\text{semantico}}(U, t): U \rightarrow \text{Significati al tempo } t$$

Nella demenza semantica:

$$F_{\text{semantico}}(U, t_0) \supset F_{\text{semantico}}(U, t_1) \supset F_{\text{semantico}}(U, t_2) \supset \dots \rightarrow \emptyset$$

Il fascio si impoverisce progressivamente nel tempo, con sezioni semantiche che scompaiono. Crucialmente, l'erosione è **hierarchically structured**: concetti più specifici, meno frequenti, più recentemente acquisiti scompaiono prima rispetto a concetti basici, ad alta frequenza, prototipici.

Legge di Ribot (1881) nella demenza: conoscenze più recenti, meno consolidate si perdono prima delle più antiche e sovra-apprese.

Formalmente, possiamo ordinare lessico per centralità/prototipicità:

Lessico = Nucleo\_prototipico  $\supset$  Livello\_basico  $\supset$  Livello\_subordinato  $\supset$  Periferia\_specifica

L'erosione procede:

$F\_semantico(t\_avanzato)(Periferia) = \emptyset$  (persi per primi)  
 $F\_semantico(t\_avanzato)(Subordinato) \approx \emptyset$   $F\_semantico(t\_avanzato)(Basico) =$  parziale  
 $F\_semantico(t\_avanzato)(Nucleo) =$  preservato più a lungo

Le mappe di restrizione temporale:

$\rho_{\{t_1, t_2\}}: F\_semantico(t_1) \rightarrow F\_semantico(t_2)$  per  $t_1 < t_2$

sono drammaticamente non-surgettive: molte sezioni semantiche presenti a  $t_1$  sono assenti a  $t_2$ . Il kernel di  $\rho$  (elementi persi) cresce con progressione malattia.

### 28.3.4 Afasia Progressiva Primaria (PPA): Degenerazione Selettiva Language-Specific

La PPA è sindrome neurodegenerativa caratterizzata da declino progressivo e relativamente isolato di funzioni linguistiche, mentre altre funzioni cognitive (memoria, ragionamento, abilità visuo-spaziali) sono inizialmente preservate. Si distinguono varianti:

**PPA non-fluente/agrammatica:** Simile ad afasia di Broca progressiva. Produzione laborioso, agrammatica, con deficit crescenti nella sintassi e morfologia.

**PPA semantica:** Corrisponde a demenza semantica descritta sopra.

**PPA logopenica:** Deficit nel recupero di parole e nella ripetizione di frasi, con produzione "vuota" per anomia ma sintassi preservata.

Modelliamo PPA come degenerazione selettiva di sottofasci linguistici mentre altri fasci cognitivi ( $F\_memoria\_episodica$ ,  $F\_ragionamento$ ,  $F\_abilità\_pratiche$ ) restano relativamente intatti nella fase iniziale.

Sistema cognitivo totale:

$F\_cognitivo = F\_linguaggio \oplus F\_memoria \oplus F\_ragionamento \oplus F\_visuo-spaziale \oplus \dots$

Nella PPA:

$F\_cognitivo(t) = F\_linguaggio(t)\_degradato \oplus F\_memoria(t)\_preservato \oplus$   
 $F\_ragionamento(t)\_preservato \oplus \dots$

Questo contrasta con demenze globali (Alzheimer) dove tutti i componenti  $F$  degradano progressivamente e approssimativamente in parallelo.

La selettività della PPA per linguaggio suggerisce modularità del sistema linguistico: è possibile danneggiare selettivamente F\_linguaggio attraverso degenerazione neurologica focale (tipicamente regioni temporali-frontali sinistre) senza impattare immediatamente altri sistemi.

Le mappe di interazione tra sistemi:

$\phi_{\text{linguaggio}} \rightarrow \text{cognizione}: F_{\text{linguaggio}} \rightarrow F_{\text{ragionamento}}$

sono preservate inizialmente: il paziente può ragionare correttamente anche se non può esprimere linguisticamente i pensieri. Ma progressivamente, dato che linguaggio interno è tool per ragionamento complesso (ipotesi Sapir-Whorf debole), anche F\_ragionamento potrebbe degradarsi secondariamente.

## 28.4 Agrammatismo: Rottura Selettiva del Fascio Morfologico-Sintattico

L'agrammatismo, caratteristica centrale delle afasie non-fluenti (Broca, PPA non-fluente), merita analisi specifica dato il suo interesse teorico per questioni di modularità grammaticale e rappresentazione sintattica.

**Pattern di agrammatismo:**

- Omissione di morfemi grammaticali funzionali (articoli, preposizioni, ausiliari, copule)
- Semplificazione strutture sintattiche (preferenza per frasi semplici mono-clausali)
- Deficit nella morfologia flessiva (verbi all'infinito invece di coniugati, nomi non flessi)
- Ordine delle parole tendenzialmente preservato (in lingue a ordine fisso come inglese)
- Maggiore preservazione di morfemi lessicali (nomi, verbi) vs funzionali

Esempio (inglese): Produzione agrammatica: "Girl... uh... cake... mother... no... uh... boy... girl bake... cookie" Target: "The girl is baking cookies with her mother while the boy steals them"

Modelliamo agrammatismo come degradazione selettiva del fascio di morfologia funzionale e sintassi complessa. Decomponiamo fascio grammaticale:

$F_{\text{grammatica}} = F_{\text{sintassi\_frasale}} \oplus F_{\text{morfologia\_flessiva}} \oplus F_{\text{morfologia\_funzionale}}$

Nell'agrammatismo:

$F_{\text{grammatica}}^{\{\text{agrammatico}\}} = F_{\text{sintassi\_basica}} \oplus F_{\text{morfologia\_flessiva\_degradata}} \oplus \emptyset_{\text{funzionale}}$

dove  $F_{\text{sintassi\_basica}}$  contiene solo strutture semplici,  $F_{\text{morfologia\_flessiva}}$  è parzialmente compromessa, e  $F_{\text{morfologia\_funzionale}}$  è essenzialmente assente (mappata a zero).



La dissociazione lessicale vs funzionale è particolarmente interessante teoricamente. Alcune teorie propongono che morfemi lessicali (nouns, verbs) e morfemi funzionali (determiners, auxiliaries, inflections) sono rappresentati in sistemi cerebrali parzialmente distinti, quindi lesionabili selettivamente.

Nel framework a fasci:

$F_{\text{lessicale}} \neq F_{\text{funzionale}}$  (fasci distinti)

Lesione può impattare  $F_{\text{funzionale}} \gg F_{\text{lessicale}}$ , spiegando pattern agrammatico.

Alternativamente, singolo fascio grammaticale ma con sezioni che hanno "salienze" diverse: morfemi funzionali sono meno "robusti", più vulnerabili a degradazione. Formalmente, una metrica di robustezza:

$p_{\text{robustezza}}: \text{Sezioni}(F_{\text{grammatica}}) \rightarrow [0,1]$

dove  $p_{\text{robustezza}}(\text{morfema}_{\text{funzionale}}) < p_{\text{robustezza}}(\text{morfema}_{\text{lessicale}})$

Sotto degradazione parziale, sezioni meno robuste sono perse per prime.

## 28.5 Dissociazioni Doppie e Architettura Modulare: Prove dalla Patologia

Il metodo delle dissociazioni doppie è gold standard per inferire modularità funzionale. Una dissociazione doppia tra funzioni A e B esiste se:

1. Esiste paziente X con deficit selettivo in A ma preservazione di B
2. Esiste paziente Y con deficit selettivo in B ma preservazione di A

Esempio classico: Dissociazione doppia produzione vs comprensione:

- Afasia di Broca: Produzione  $\ll$  Comprensione (deficit produzione, comprensione OK)
- Afasia di Wernicke: Comprensione  $\ll$  Produzione (comprensione compromessa, produzione fluente)

Questa dissociazione doppia suggerisce che sistemi neurali per produzione e comprensione sono almeno parzialmente distinti, modularmente dissociabili.

Nel framework a fasci:

$F_{\text{produzione}}$  e  $F_{\text{comprensione}}$  sono fasci distinti

Lesione può impattare selettivamente uno senza impattare necessariamente l'altro. Formalmente, definiamo morfismo di proiezione:

$\pi_{\text{prod}}: F_{\text{linguaggio}} \rightarrow F_{\text{produzione}}$   $\pi_{\text{compr}}: F_{\text{linguaggio}} \rightarrow F_{\text{comprensione}}$

Lesione L può danneggiare  $\pi_{\text{prod}}$  ma preservare  $\pi_{\text{compr}}$  (Broca), o viceversa (Wernicke).

Altra dissociazione doppia: Regolare vs Irregolare nella morfologia:

- Alcuni pazienti hanno deficit selettivo sui verbi irregolari preservando regolari
- Altri pazienti hanno pattern opposto

Questo suggerisce che morfologia regolare (rule-based: walk  $\rightarrow$  walked) e irregolare (item-specific: go  $\rightarrow$  went) sono computazionalmente e neuralmente distinte.

Nel framework a fasci:

$$F_{\text{morfologia}} = F_{\text{regolare}} \oplus F_{\text{irregolare}}$$

con  $F_{\text{regolare}}$  implementato attraverso regole produttive (morfismo generativo),  $F_{\text{irregolare}}$  attraverso storage lessicale (lookup in fascio finito di forme memorizzate).

Lesioni possono impattare selettivamente uno o l'altro sottosistema.

## Capitolo 29: Confronto Sistemático con Altre Teorie Semantiche

### Semantica Vero-Condizionale Classica e Approccio dei Fasci

#### 29.1 Introduzione: Necessità di un Confronto Teorico Sistemático

Dopo aver sviluppato in dettaglio la teoria dei fasci semantici attraverso i precedenti capitoli di questo saggio, esaminandone i fondamenti matematici, le applicazioni analitiche concrete, le implementazioni computazionali e le estensioni teoriche avanzate, è ora imprescindibile e metodologicamente necessario situare questo framework innovativo all'interno del panorama più ampio delle teorie semantiche contemporanee. Una teoria scientifica, per quanto matematicamente rigorosa e internamente coerente, non acquisisce pieno valore esplicativo e non può rivendicare legittimamente superiorità euristica se non attraverso un confronto sistemático, dettagliato e intellettualmente onesto con le alternative teoriche esistenti, consolidate, empiricamente testate nel corso di decenni di ricerca linguistica e filosofica.

Il confronto teorico che intraprenderemo in questo capitolo non è un semplice esercizio retorico di auto-promozione o una difesa aprioristica del nostro approccio, ma costituisce piuttosto un'analisi comparativa genuinamente critica, metodologicamente rigorosa, che riconosce onestamente sia i punti di forza sia le limitazioni intrinseche di ciascun framework teorico esaminato, incluso quello basato sui fasci che abbiamo proposto. Questa analisi comparativa ha molteplici obiettivi scientifici interconnessi.

Primo, il confronto sistematico permette di identificare con precisione quali fenomeni semantici e pragmatici ciascuna teoria è particolarmente adatta a catturare, spiegare e formalizzare, e quali fenomeni invece presentano difficoltà esplicative, richiedono stipulazioni ad hoc, o addirittura sfuggono completamente alla portata del framework teorico. Non esiste, probabilmente non può esistere per ragioni di principio, una teoria semantica universalmente ottimale che eccella uniformemente su tutti i fenomeni linguistici e su tutte le dimensioni di valutazione teorica. Diverse teorie possono avere vantaggi comparativi su domini fenomenologici diversi, e riconoscere queste specificità è essenziale per un uso appropriato e informato degli strumenti teorici disponibili.

Secondo, il confronto esplicita le assunzioni ontologiche, epistemologiche e metodologiche sottostanti a ciascun approccio, assunzioni che spesso rimangono implicite o non tematizzate nella presentazione standard delle teorie ma che hanno conseguenze profonde per la natura delle spiegazioni che le teorie possono offrire, per i tipi di evidenza empirica che considerano rilevanti, per le relazioni che intrattengono con discipline adiacenti come la psicologia cognitiva, la neuroscienza del linguaggio, la filosofia della mente, l'intelligenza artificiale. Portare alla superficie queste assunzioni fondazionali permette una valutazione più consapevole e filosoficamente informata delle teorie in competizione.

Terzo, il confronto può rivelare possibilità di integrazione, complementarità, sintesi costruttiva tra approcci che superficialmente appaiono incompatibili o contraddittori ma che, a un'analisi più profonda, potrebbero risultare complementari, ciascuno catturando aspetti diversi di una realtà semantica multidimensionale e complessa. La storia della scienza mostra ripetutamente che progressi significativi emergono spesso non dalla vittoria definitiva di un paradigma su tutti gli altri, ma dalla sintesi creativa che integra intuizioni provenienti da frameworks apparentemente antagonisti.

Quarto, e essenzialmente per i nostri scopi, il confronto permette di articolare con massima chiarezza e precisione quali contributi specifici, quali innovazioni concettuali e formali, quali nuove capacità esplicative l'approccio dei fasci apporta al panorama semantico, contributi che non sarebbero facilmente riducibili o simulabili all'interno dei frameworks alternativi senza modificazioni sostanziali della loro architettura teorica. È attraverso questa articolazione di novità irriducibile che possiamo giustificare l'introduzione di un formalismo matematico sofisticato e tecnicamente impegnativo come la teoria dei fasci, formalismo che potrebbe altrimenti apparire come complicazione non necessaria, mera "vestizione" matematica di idee già esprimibili in linguaggi teorici più semplici e familiari.

Le teorie con cui confronteremo l'approccio dei fasci sono state selezionate per rappresentare posizioni paradigmatiche, influenti e teoricamente mature all'interno del panorama semantico contemporaneo. Queste teorie non esauriscono certamente l'intero spettro di approcci esistenti, ma costituiscono punti di riferimento sufficientemente rappresentativi delle principali orientazioni metodologiche, delle principali divisioni teoriche, delle principali controversie filosofiche che strutturano il dibattito semantico.

Le teorie che esamineremo in dettaglio sono:

**Semantica Vero-Condizionale Classica:** La tradizione fregiana, russelliana, tarskiana, davidsoniana che identifica il significato di una frase con le sue condizioni di verità, modellando l'interpretazione semantica attraverso funzioni da mondi possibili a valori di

verità. Questa tradizione, dominante nella semantica formale per gran parte del ventesimo secolo, fornisce il background teorico contro cui molte proposte alternative sono state formulate in reazione o in estensione.

**Semantica Cognitiva:** L'approccio incarnato (embodied), basato su prototipi, frame, metafore concettuali, sviluppato principalmente da George Lakoff, Ronald Langacker, Leonard Talmy e altri, che enfatizza i fondamenti percettivi, motori e immaginativi del significato linguistico, rifiutando l'autonomia della semantica rispetto alla cognizione generale e alla struttura corporea dell'esperienza umana.

**Teoria della Pertinenza (Relevance Theory):** Il framework cognitivo-pragmatico di Dan Sperber e Deirdre Wilson che modella la comunicazione umana come processo inferenziale guidato da principi di ottimizzazione cognitiva, dove il significato emerge dall'interazione tra codifica linguistica e processi contestuali di arricchimento pragmatico governati dal principio di pertinenza.

Ciascuna di queste teorie rappresenta non semplicemente una proposta tecnica specifica ma un'intera visione della natura del significato linguistico, del ruolo della semantica all'interno delle scienze cognitive, della metodologia appropriata per indagare fenomeni semantici. Il confronto che seguirà è quindi necessariamente filosofico oltre che tecnico, coinvolge questioni di ontologia semantica, di rapporti mente-linguaggio-mondo, di natura della competenza linguistica umana.

Prima di procedere al confronto dettagliato, è utile articolare esplicitamente alcune dimensioni di valutazione lungo le quali confronteremo le teorie. Queste dimensioni non costituiscono criteri assoluti di superiorità teorica ma piuttosto assi concettuali che permettono un confronto strutturato e multidimensionale:

**Potere Esplicativo:** Quali fenomeni semantici e pragmatici la teoria può spiegare, formalizzare, predire? Quali fenomeni rimangono oscuri, richiedono stipulazioni ad hoc, o sfuggono alla portata della teoria?

**Rigore Formale e Precisione:** Quanto è matematicamente precisa e rigorosa la formulazione della teoria? Permette derivazioni formali, prove di teoremi, calcoli algoritmici? O opera principalmente a livello di intuizioni informali e generalizzazioni qualitative?

**Plausibilità Cognitiva e Psicologica:** La teoria è compatibile con ciò che sappiamo sui processi cognitivi umani, sull'acquisizione del linguaggio, sul processamento psicolinguistico in tempo reale? O richiede capacità computazionali, rappresentazioni mentali, operazioni cognitive implausibili o empiricamente non supportate?

**Parsimonia Ontologica:** Quante e quali entità teoriche la teoria postula? È ontologicamente parsimoniosa o prolifera entità esplicative al di là della necessità empirica?

**Composizionalità:** Come la teoria gestisce la composizionalità semantica, il fatto che il significato di espressioni complesse dipende sistematicamente dal significato dei costituenti e dalla loro modalità di combinazione sintattica?

**Dipendenza Contestuale:** Come la teoria modella la variazione contestuale del significato, la sensibilità pragmatica, la sottodeterminazione semantica? Cattura adeguatamente la flessibilità e dinamicità dell'interpretazione linguistica in contesto?

**Interfaccia con Sintassi e Morfologia:** Come la teoria si interfaccia con teorie sintattiche? Permette un'integrazione naturale o richiede stipulazioni complesse di mappatura?

**Estensibilità e Generalità:** La teoria si applica solo a un dominio ristretto di fenomeni o ha portata generale attraverso diverse lingue, costruzioni, livelli di analisi?

Queste dimensioni non sono indipendenti ma interagiscono in modi complessi. Per esempio, maggiore rigore formale spesso comporta minore plausibilità cognitiva immediata, mentre maggiore generalità può richiedere sacrifici di precisione predittiva su casi specifici. Il confronto che segue cercherà di fare giustizia a queste complessità.

## 29.2 Semantica Vero-Condizionale Classica: Fondamenti e Architettura Teorica

La semantica vero-condizionale, nella sua formulazione classica che affonda le radici nel lavoro pionieristico di Gottlob Frege alla fine del diciannovesimo secolo, si basa su una intuizione fondamentale che è al contempo profondamente semplice e straordinariamente potente: il significato di una frase dichiarativa consiste nelle condizioni che devono sussistere nel mondo affinché quella frase sia vera. Questa intuizione, che Frege articolò nella sua distinzione tra Sinn (senso) e Bedeutung (denotazione o referenza), è stata sviluppata e raffinata attraverso il lavoro di Bertrand Russell sulla teoria delle descrizioni definite, di Alfred Tarski sulla definizione semantica di verità per linguaggi formalizzati, di Rudolf Carnap sulla semantica intensionale e gli spazi modali, e culmina nel ventesimo secolo nella semantica formale di Richard Montague e nella teoria del significato di Donald Davidson.

Il framework vero-condizionale classico assume che il linguaggio naturale, nonostante la sua apparente disorganizzazione superficiale, ammetta un'analisi sistematica in termini di strutture logiche sottostanti che sono interpretabili attraverso una semantica modello-teorica rigorosa. Questo programma di ricerca, che potremmo chiamare il progetto di "logicizzazione" del linguaggio naturale, procede tipicamente attraverso diverse fasi metodologiche interconnesse.

Primo, si identificano le forme logiche (Logical Forms, LF) delle frasi del linguaggio naturale attraverso un processo di traduzione o parafrasazione che esplicita la struttura argomentale, la portata degli operatori quantificazionali e modali, le relazioni di dipendenza anaforica, le ambiguità strutturali. Per esempio, la frase italiana "Ogni studente ha letto un libro" potrebbe ricevere (almeno) due forme logiche distinte a seconda dell'interpretazione della portata relativa dei quantificatori:

LF<sub>1</sub> (lettura  $\forall > \exists$ ):  $\forall x[\text{Studente}(x) \rightarrow \exists y[\text{Libro}(y) \wedge \text{Leggere}(x,y)]]$

"Per ogni individuo x, se x è studente, allora esiste un individuo y tale che y è libro e x ha letto y"

$LF_2$  (lettura  $\exists > \forall$ ):  $\exists y[\text{Libro}(y) \wedge \forall x[\text{Studente}(x) \rightarrow \text{Leggere}(x,y)]]$

"Esiste un individuo  $y$  tale che  $y$  è libro e per ogni  $x$ , se  $x$  è studente, allora  $x$  ha letto  $y$ "

Queste due forme logiche distinte catturano le due letture semantiche possibili della frase originale: nella prima lettura, il libro può variare per ogni studente (ogni studente ha letto qualche libro, possibilmente diverso); nella seconda lettura, c'è un libro specifico che tutti gli studenti hanno letto (lo stesso libro).

Secondo, si specifica un modello  $M = \langle D, I \rangle$  costituito da un dominio di individui  $D$  (l'universo del discorso, l'insieme di tutte le entità di cui il linguaggio può parlare) e una funzione di interpretazione  $I$  che assegna estensioni appropriate ai predicati e ai nomi del linguaggio. Per esempio,  $I(\text{Studente}) \subseteq D$  è l'insieme degli individui che sono studenti,  $I(\text{Libro}) \subseteq D$  è l'insieme degli individui che sono libri,  $I(\text{Leggere}) \subseteq D \times D$  è l'insieme delle coppie ordinate  $\langle x, y \rangle$  tali che  $x$  ha letto  $y$ . Per nomi propri,  $I(\text{Giovanni}) \in D$  è l'individuo denotato dal nome "Giovanni".

Terzo, si definiscono ricorsivamente le condizioni di verità delle formule del linguaggio logico rispetto a un modello  $M$ . Questa definizione ricorsiva procede per induzione sulla complessità strutturale delle formule, specificando come la verità di formule complesse dipenda dalla verità (o dall'estensione) delle loro componenti. Le clausole fondamentali includono:

- **Predicazione atomica:**  $M \models P(t_1, \dots, t_n)$  se e solo se  $\langle I(t_1), \dots, I(t_n) \rangle \in I(P)$ , ovvero la tupla di denotazioni degli argomenti appartiene all'estensione del predicato.
- **Negazione:**  $M \models \neg \phi$  se e solo se non  $M \models \phi$ , ovvero  $\phi$  non è vera nel modello.
- **Congiunzione:**  $M \models \phi \wedge \psi$  se e solo se  $M \models \phi$  e  $M \models \psi$ , ovvero entrambe le congiunte sono vere.
- **Quantificazione universale:**  $M \models \forall x \phi(x)$  se e solo se per ogni  $d \in D$ ,  $M \models \phi(d)$ , ovvero  $\phi$  è vera per ogni possibile assegnazione di valore alla variabile  $x$ .
- **Quantificazione esistenziale:**  $M \models \exists x \phi(x)$  se e solo se esiste  $d \in D$  tale che  $M \models \phi(d)$ , ovvero  $\phi$  è vera per almeno un'assegnazione di valore a  $x$ .

Questa definizione ricorsiva garantisce composizionalità semantica in senso stretto: il valore di verità di una formula complessa è completamente determinato dai valori di verità (o estensioni) delle sue componenti e dalla struttura sintattica che le combina. La composizionalità è un desideratum teorico fondamentale perché permette di spiegare la produttività linguistica: la capacità umana di comprendere e produrre frasi mai incontrate precedentemente deriva dal fatto che conosciamo i significati delle parole costituenti e le regole composizionali di combinazione.

Quarto, per gestire fenomeni che vanno oltre la semantica estensionale semplice (modalità, tempo, attitudini proposizionali, condizionali controfattuali), il framework vero-condizionale introduce intensioni, tipicamente modellate come funzioni da mondi possibili (e tempi, e altri

parametri contestuali) a estensioni. Nella semantica intensionale di Montague, ogni espressione significativa è associata non solo a un'estensione (la sua denotazione nel mondo attuale) ma anche a un'intensione (una funzione che specifica quale sarebbe la sua estensione in ciascun mondo possibile).

Per esempio, il predicato "essere umano" ha come estensione attuale l'insieme di tutti gli esseri umani esistenti nel mondo attuale  $w_0$ , ma la sua intensione è la funzione  $\lambda w.\{x : x \text{ è umano in } w\}$ , che assegna a ogni mondo possibile  $w$  l'insieme degli individui che sono umani in quel mondo. Questa intensione cattura il fatto che in mondi controfattuali potrebbero esistere esseri umani diversi da quelli attuali (mondi dove individui diversi sono nati), o potrebbero non esistere umani affatto (mondi dove l'evoluzione ha preso percorsi diversi).

Gli operatori modali come "necessariamente" ( $\Box$ ) e "possibilmente" ( $\Diamond$ ) operano su intensioni. La frase "Necessariamente,  $2 + 2 = 4$ " è vera se e solo se la proposizione espressa da " $2 + 2 = 4$ " (intesa come insieme di mondi possibili dove la proposizione è vera) è l'insieme di tutti i mondi possibili, ovvero se questa proposizione è vera in ogni mondo possibile accessibile. Formalmente:

$$M, w \models \Box \phi \Leftrightarrow \text{per ogni } w' \text{ tale che } wRw', M, w' \models \phi$$

dove  $R$  è una relazione di accessibilità tra mondi che specifica quali mondi sono "possibili" relativamente a un mondo dato. Variando le proprietà di  $R$  (riflessività, transitività, simmetria), otteniamo diverse logiche modali che catturano diversi tipi di modalità (metafisica, epistemica, deontica, temporale).

## 29.3 Punti di Forza della Semantica Vero-Condizionale

La semantica vero-condizionale classica ha dimostrato nel corso di decenni di sviluppo teorico una serie di virtù esplicative e formali che ne giustificano il ruolo dominante nella semantica formale contemporanea. Esaminiamo sistematicamente questi punti di forza prima di considerare le sue limitazioni.

### 29.3.1 Rigore Matematico e Precisione Formale

Il primo e forse più evidente punto di forza della semantica vero-condizionale è il suo rigore matematico estremo. Le definizioni di verità tarskiane sono formalmente precise, matematicamente rigorose, permettono derivazioni dimostrative, calcoli algoritmici esatti. Non c'è ambiguità interpretativa su cosa significa affermare che una formula  $\phi$  è vera in un modello  $M$ : questo è definito esplicitamente attraverso clausole ricorsive ben specificate. Questa precisione contrasta nettamente con framework più informali dove i concetti chiave rimangono vaghi, impressionistici, resistenti a formalizzazione rigorosa.

Il rigore formale ha conseguenze metodologiche importanti. Permette di testare con precisione le predizioni della teoria: data una forma logica specifica e un modello esplicitamente definito, possiamo calcolare meccanicamente se una frase dovrebbe essere vera o falsa secondo la teoria, e confrontare questa predizione con giudizi di verità intuitivi. Permette di identificare con chiarezza dove la teoria funziona e dove fallisce, evitando formulazioni vaghe che sfuggono a controllo empirico.

Inoltre, il rigore matematico facilita scoperte teoriche attraverso esplorazione formale. Teoremi dimostrabili nella semantica modello-teorica (teoremi di completezza, compattezza, decidibilità) hanno talvolta conseguenze linguistiche non ovvie. Per esempio, il teorema di compattezza della logica del primo ordine (se ogni sottoinsieme finito di un insieme di formule ha modello, allora l'intero insieme ha modello) ha implicazioni per questioni di composizionalità e finitudine cognitiva.

### 29.3.2 Composizionalità Sistemica e Produttività

La semantica vero-condizionale offre un trattamento estremamente naturale e sistematico della composizionalità semantica. Le clausole ricorsive della definizione tarskiana di verità garantiscono per costruzione che il significato (condizioni di verità) di espressioni complesse dipenda in modo sistematico e prevedibile dal significato dei costituenti e dalla loro modalità di combinazione sintattica.

Questa composizionalità sistematica spiega la produttività linguistica: il fatto che parlanti competenti possano comprendere frasi mai incontrate prima, potenzialmente infinite frasi generate dalla grammatica. Se conosco il significato di "Giovanni", "Maria", "leggere", "libro" e le regole composizionali, posso immediatamente comprendere "Giovanni ha letto il libro che Maria ha comprato", anche se non ho mai incontrato questa frase specifica precedentemente.

La composizionalità è implementata attraverso il principio di Frege: il valore semantico di un'espressione complessa è funzione dei valori semantici delle sue parti immediate. Nella semantica intensionale di Montague, questo principio è raffinato ulteriormente: esiste una algebrizzazione sistematica dove a ogni regola sintattica corrisponde una regola semantica di combinazione funzionale. Se la sintassi combina espressioni  $\alpha$  e  $\beta$  producendo  $\gamma$ , la semantica specifica come l'intensione di  $\gamma$  si calcola a partire dalle intensioni di  $\alpha$  e  $\beta$  attraverso operazioni come applicazione funzionale, astrazione lambda, intensionalizzazione.

### 29.3.3 Trattamento Unificato di Fenomeni Logici

La semantica vero-condizionale fornisce trattamenti unificati ed eleganti di fenomeni che coinvolgono operatori logici: negazione, quantificazione, connettivi proposizionali, modalità. Le relazioni di conseguenza logica (entailment) emergono naturalmente:  $\phi$  implica logicamente  $\psi$  se e solo se in ogni modello dove  $\phi$  è vera, anche  $\psi$  è vera. Contraddizioni sono formule vere in nessun modello, tautologie formule vere in ogni modello.

Questo trattamento unificato cattura intuizioni logiche profonde. Per esempio, le leggi di De Morgan ( $\neg(\phi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \vee \neg\psi)$  e  $\neg(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \wedge \neg\psi)$ ) sono teoremi dimostrabili, non stipulazioni separate. La dualità tra  $\forall$  e  $\exists$  ( $\neg\forall x \phi(x) \Leftrightarrow \exists x \neg\phi(x)$ ) emerge dalla definizione semantica dei quantificatori.

Il potere unificante si estende a fenomeni cross-linguistici. Pattern di negazione, portata quantificazionale, ambiguità strutturali che sembrano superficialmente diversi in lingue diverse spesso ricevono analisi unificate al livello della forma logica e delle condizioni di verità. Questo suggerisce che sotto la variazione superficiale ci siano principi semantici universali.



### 29.3.4 Interfaccia Naturale con Logica e Matematica

La semantica vero-condizionale eredita tutto l'apparato formale della logica matematica: sistemi di deduzione naturale, calcoli dei sequenti, tableaux semantici, procedure di decisione, risultati metalogici (completezza, soundness, compattezza). Questo permette di studiare il ragionamento linguistico umano utilizzando strumenti logici consolidati.

Per esempio, se vogliamo determinare se una certa inferenza è valida (se dalle premesse seguono logicamente le conclusioni), possiamo tradurre le frasi in forme logiche e applicare un sistema deduttivo per verificare derivabilità formale. Alternativamente, possiamo usare la semantica modello-teorica: l'inferenza è valida sse non esiste modello dove tutte le premesse sono vere ma la conclusione è falsa.

Questa interfaccia è particolarmente potente in domini tecnici dove linguaggio naturale e matematica si intrecciano: linguaggio scientifico, definizioni matematiche espresse in linguaggio semi-formale, specifiche di sistemi software, contratti legali che richiedono interpretazione logicamente rigorosa. La semantica vero-condizionale fornisce un ponte tra informalità del linguaggio naturale e rigore della logica formale.

### 29.3.5 Semantica Intensionale e Modalità

L'estensione della semantica vero-condizionale a frameworks intensionali (Montague, Kaplan, Lewis) permette trattamenti sofisticati di modalità, tempo, attitudini proposizionali, contesti. La semantica dei mondi possibili fornisce interpretazioni formali precise di costruzioni come:

- **Modalità metafisica:** "Necessariamente, l'acqua è  $H_2O$ " - vero in tutti i mondi metafisicamente possibili (quelli che condividono le stesse leggi naturali fondamentali).
- **Modalità epistematica:** "A sa che p" - vero se p è vero in tutti i mondi compatibili con la conoscenza di A.
- **Modalità deontica:** "È obbligatorio che  $\varphi$ " - vero se  $\varphi$  è vero in tutti i mondi deonticamente ideali (conformi a norme morali o legali).
- **Condizionali controfattuali:** "Se Giovanni fosse venuto, Maria sarebbe stata felice" - valutato rispetto a mondi possibili vicini al mondo attuale dove l'antecedente è vero.

La semantica di Kaplan per indicali e dimostrativi ("io", "qui", "ora", "questo") introduce caratteri come funzioni da contesti a intensioni, catturando la dipendenza sistematica di questi termini da parametri contestuali come parlante, luogo di enunciazione, tempo di enunciazione.

## 29.4 Limitazioni e Difficoltà della Semantica Vero-Condizionale

Nonostante i suoi successi formali innegabili, la semantica vero-condizionale classica incontra difficoltà significative, sia empiriche che concettuali, che hanno motivato sviluppi

alternativi nella semantica contemporanea. Esaminiamo sistematicamente queste limitazioni.

#### 29.4.1 Sottodeterminazione Semantica e Dipendenza Contestuale Pervasiva

Una difficoltà fondamentale per la semantica vero-condizionale è che le condizioni di verità delle frasi del linguaggio naturale sembrano cronicamente sottodeterminate dal contenuto semantico codificato linguisticamente. Il contenuto esplicito (ciò che è "detto" letteralmente) sembra raramente sufficiente a determinare condizioni di verità complete, stabili, valutabili. Quasi sempre è necessario arricchimento pragmatico contestuale massiccio per arrivare a contenuti proposizionali valutativi per verità.

Consideriamo frasi apparentemente semplici:

"Giovanni ha mangiato."

Le condizioni di verità dipendono criticamente da:

- **Cosa ha mangiato?** (quantificazione implicita su cibo)
- **Quando ha mangiato?** (se il tempo verbale non lo specifica completamente)
- **Dove ha mangiato?** (rilevante per certe valutazioni di verità)
- **Ha finito di mangiare?** (aspetto telico vs atelico)

Il contenuto semantico codificato sembra fornire solo uno "scheletro" che richiede "riempimento" contestuale prima di determinare condizioni di verità complete. Ma se questo riempimento è sistematico, pervasivo, inevitabile, possiamo ancora sostenere che le condizioni di verità sono il significato codificato linguisticamente? O dovremmo dire che il significato codificato è qualcosa di più astratto, e le condizioni di verità emergono solo post-arricchimento pragmatico?

Un esempio ancora più problematico:

"Giovanni è pronto."

Pronto per cosa? Questa domanda non ha risposta a livello puramente semantico. Il contenuto proposizionale completo dipende interamente dal contesto: pronto per partire, pronto per mangiare, pronto per l'esame, pronto psicologicamente per una relazione. Non c'è modo di specificare condizioni di verità senza integrare informazione contestuale massiccia.

La semantica vero-condizionale classica ha due strategie per gestire questi casi:

**Strategia 1:** Postulare che ci siano variabili libere (slots vuoti) nella forma logica che devono essere riempite contestualmente. "Giovanni è pronto" ha forma logica tipo Pronto(Giovanni, x) dove x è variabile contestuale. Il contesto fornisce valore per x.

**Problema:** Questa strategia tratta la dipendenza contestuale come recupero di parametri, ma non spiega quali parametri devono essere recuperati, come il contesto guida il recupero, perché certi parametri sono obbligatori mentre altri opzionali. La teoria diventa

descrittivamente adeguata ma esplicativamente vuota: stipula che c'è dipendenza contestuale senza spiegare la struttura e i vincoli di questa dipendenza.

**Strategia 2:** Sostenere che le condizioni di verità sono relative a contesti, e il significato semantico è funzione da contesti a condizioni di verità. Questo avvicina la semantica vero-condizionale alla teoria dei fasci, ma rinuncia alla tesi che il significato sia semplicemente condizioni di verità.

#### 29.4.2 Implicature Conversazionali e Contenuto Non-Vero-Condizionale

Grice ha mostrato che molto del contenuto comunicato non è parte delle condizioni di verità semantiche ma emerge attraverso implicature conversazionali. Per esempio:

"Alcuni studenti hanno passato l'esame."

Condizioni di verità semantiche (secondo la teoria): vero sse almeno uno studente ha passato (compatibile con "tutti hanno passato").

Contenuto comunicato tipicamente: almeno uno ma non tutti hanno passato.

Questa discrepanza nasce perché "alcuni" implica conversazionalmente "non tutti" attraverso il ragionamento griceano: se il parlante sapesse che tutti hanno passato e volesse essere massimalmente informativo (massima di Quantità), avrebbe detto "tutti" che è più forte. Dicendo "alcuni" implica che "tutti" non è appropriato, quindi non tutti hanno passato.

Questo contenuto implicato è cruciale per la comunicazione effettiva ma non è parte delle condizioni di verità semantiche. La semantica vero-condizionale classica relega queste implicature alla pragmatica, trattandole come separate dal significato semantico propriamente detto.

**Problema:** La linea tra semantica e pragmatica diventa sfocata. Molti linguisti (Levinson, Chierchia, Spector) hanno argomentato che alcune "implicature" sono così sistematiche, automatiche, difficili da cancellare che dovrebbero essere trattate come parte del significato semantico (implicature scalari grammaticalizzate). Ma come incorporarle in una semantica vero-condizionale senza abbandonare la tesi centrale?

#### 29.4.3 Presupposizioni e Fallimento di Valore di Verità

Le presupposizioni sono condizioni di felicità che devono essere soddisfatte affinché una frase possa essere valutata per verità. Per esempio:

"Il re di Francia è calvo."

Presuppone: esiste un unico re di Francia. Se questa presupposizione fallisce (come nel mondo attuale dove la Francia è una repubblica), la frase non ha valore di verità classico. Non è semplicemente falsa (come lo sarebbe "Il re di Francia non è calvo" se il re esistesse ma avesse capelli), ma è piuttosto infelice, inappropriata, valutabile per verità.

La semantica vero-condizionale classica bivalente (ogni proposizione è vera o falsa) non gestisce bene fallimenti presupposizionali. Le strategie principali sono:

**Strategia 1 (Russell):** Analizzare descrizioni definite come quantificazioni esistenziali: "Il re di Francia è calvo" = "Esiste esattamente un re di Francia e è calvo". Questa formula è semplicemente falsa se non c'è re di Francia.

**Problema:** Questa analisi predice che "Il re di Francia non è calvo" dovrebbe essere vera (la negazione di una formula falsa), ma intuitivamente è altrettanto infelice come la versione affermativa. Le presupposizioni si "proiettano" attraverso la negazione, suggerendo che non fanno parte del contenuto vero-condizionale assertito.

**Strategia 2:** Introdurre logiche trivalenti o parziali dove le frasi con presupposizioni fallite hanno terzo valore (indeterminato, né vero né falso, gap di valore di verità).

**Problema:** Questo complica drammaticamente la semantica compositiva. Come si compongono valori di verità trivalenti? Quali tavole di verità usare per connettivi? La semplicità della semantica vero-condizionale classica viene compromessa.

#### 29.4.4 Polisemia e Vaghezza

Parole polisemiche come "banco" presentano difficoltà: hanno un unico significato sottodeterminato che si precisa contestualmente, o molteplici significati distinti tra cui il contesto seleziona?

Se assumiamo molteplici significati distinti (entrate lessicali multiple:  $\text{banco}_1$ ,  $\text{banco}_2$ , ...), allora dobbiamo spiegare come questi significati correlati sistematicamente. La polisemia regolare (libro fisico vs contenuto informativo, città come entità geografica vs popolazione vs governo) sembra seguire pattern produttivi che la semplice enumerazione di entrate lessicali non cattura.

Se assumiamo significato sottodeterminato unico, rinunciamo all'idea che significato lessicale determina condizioni di verità: il significato è più astratto, schematico, e condizioni di verità emergono solo dopo specializzazione contestuale.

La vaghezza (predicati come "alto", "calvo", "rosso" con casi borderline) è ancora più problematica. La semantica vero-condizionale classica assume che ogni predicato  $P$  divide il dominio in due parti sharp: individui che soddisfano  $P$  e individui che non soddisfano  $P$ . Ma per predicati vaghi questa divisione non esiste: ci sono individui per cui non c'è fatto oggettivo se sono alti o non alti, calvi o non calvi.

Le strategie vero-condizionali (epistemicismo di Williamson, supersvalutazionismo di Fine, contestualismo) richiedono modifiche sostanziali della semantica classica.

### 29.5 Come i Fasci Semantici Affrontano le Limitazioni Vero-Condizionali

L'approccio dei fasci semantici che abbiamo sviluppato nei capitoli precedenti offre risposte originali, matematicamente precise e concettualmente naturali a molte delle difficoltà che affliggono la semantica vero-condizionale classica. Esaminiamo sistematicamente come il framework dei fasci risolve o dissolve i problemi identificati.

#### 29.5.1 Dipendenza Contestuale come Struttura Topologica Intrinseca

La teoria dei fasci non tratta la dipendenza contestuale come fenomeno periferico, complicazione pragmatica che contamina una semantica altrimenti pura e context-independent, ma la pone al centro dell'architettura teorica. Il significato di un'espressione non è modellato come entità statica (insieme di condizioni di verità, estensione, intensione) ma come fascio, ovvero un sistema coerente di interpretazioni locali parametrizzate da un spazio topologico di contesti.

La sottodeterminazione semantica che appare problematica per la semantica vero-condizionale è completamente naturale nel framework dei fasci: il significato codificato linguisticamente è la struttura globale del fascio (l'intero sistema di interpretazioni locali più le mappe di restrizione che le connettono), mentre le condizioni di verità specifiche sono sezioni locali del fascio, valutate in regioni contestuali particolari.

Consideriamo "Giovanni è pronto". Invece di cercare condizioni di verità context-independent (impossibili), o stipulare che ci sia variabile libera  $x$  da saturare pragmaticamente (descrittivamente adeguato ma esplicativamente vuoto), il fascio  $F_{\text{pronto}}$  assegna a ogni regione contestuale  $U$  interpretazioni appropriate:

- In  $U_{\text{viaggio}}$  (contesti di preparazione per viaggi):  $F_{\text{pronto}}(U_{\text{viaggio}})$  contiene interpretazioni "pronto a partire", "bagagli pronti", "documenti in ordine"
- In  $U_{\text{cibo}}$  (contesti di pasti):  $F_{\text{pronto}}(U_{\text{cibo}})$  contiene interpretazioni "pronto a mangiare", "a tavola con piatto servito", "fame appropriata"
- In  $U_{\text{psicologico}}$  (contesti di stati mentali):  $F_{\text{pronto}}(U_{\text{psicologico}})$  contiene interpretazioni "psicologicamente preparato", "emotivamente stabile", "motivato"

Le mappe di restrizione  $p_{\{U,V\}}: F_{\text{pronto}}(U) \rightarrow F_{\text{pronto}}(V)$  per  $V \subseteq U$  codificano come interpretazioni si specializzano quando il contesto si restringe. Se  $U$  è l'aperto generale dei contesti di viaggi e  $V \subseteq U$  sono contesti di viaggi internazionali, la restrizione potrebbe aggiungere vincoli come "passaporto valido", "visti appropriati".

Questa struttura cattura sistematicamente:

1. **Cosa determina quali parametri contestuali sono rilevanti:** La topologia dello spazio contestuale  $X$  codifica quali dimensioni contestuali esistono e come si strutturano. Gli aperti rilevanti per  $F_{\text{pronto}}$  sono quelli che discriminano tipi di preparazione.
2. **Come le interpretazioni locali si compongono:** Le mappe di restrizione garantiscono coerenza: se ho interpretazione su  $U$  che include  $V$ , la restrizione a  $V$  è compatibile. Non posso avere interpretazione "pronto psicologicamente" su  $U_{\text{psicologico}}$  che diventa "bagagli pronti" quando restringo a un sottocontesto: le restrizioni preservano tipo di preparazione.
3. **Quali pattern di dipendenza contestuale sono possibili:** La condizione di fascio (località e incollamento) vincola fortemente: interpretazioni locali compatibili devono incollare globalmente. Questo predice che non possiamo avere significati

arbitrariamente frammentati senza struttura.

### 29.5.2 Implicature come Epifenomeni di Struttura Coomologica

Le implicature conversazionali griceane, che nella semantica vero-condizionale sono relegati a un livello pragmatico separato, ricevono nell'approccio dei fasci uno status più integrato e strutturato. Le implicature non sono semplicemente inferenze aggiunte post-hoc al contenuto semantico, ma emergono dalla struttura coomologica del fascio semantico in interazione con fasci di norme conversazionali.

Ricordiamo il caso di "alcuni studenti hanno passato" con implicatura "non tutti". Nel framework dei fasci, possiamo modellare questo come segue:

Definiamo fascio  $F_{\text{alcuni}}$  che assegna a ogni regione contestuale  $U$  il contenuto semantico vero-condizionale di "alcuni":

$$F_{\text{alcuni}}(U) = \{s : U \rightarrow \{0,1\} \mid s(c) = 1 \text{ sse almeno uno studente ha passato nel contesto } c\}$$

Questo è il contenuto semantico stretto, compatibile con "tutti". Ora definiamo fascio  $F_{\text{massime\_griceane}}$  che codifica le massime conversazionali (Quantità, Qualità, Rilevanza, Modo) come vincoli sulle interpretazioni:

$$F_{\text{massime}}(U) = \{\text{configurazioni di norme conversazionali attive in contesti } c \in U\}$$

In particolare, la massima di Quantità richiede che il parlante fornisca informazione sufficiente e non più di quanto necessario. Se il parlante sa che tutti gli studenti hanno passato e vuole essere massimamente informativo, direbbe "tutti" (termine più forte nella scala quantitativa).

Le implicature scalari emergono attraverso un morfismo di interazione:

$$\phi_{\text{implic}}: F_{\text{alcuni}} \times F_{\text{massime}} \rightarrow F_{\text{implicature\_scalari}}$$

Questo morfismo calcola: dato il contenuto semantico di "alcuni" e le massime griceane attive nel contesto, quali implicature si generano? In contesti cooperativi standard dove le massime sono attive,  $\phi_{\text{implic}}$  produce l'implicatura "non tutti". In contesti non-cooperativi o dove le massime sono sospese, l'implicatura non si genera.

La cancellabilità delle implicature (non sono parte del contenuto vero-condizionale) è catturata dal fatto che  $\phi_{\text{implic}}$  non è iniettivo: configurazioni diverse di massime attive possono portare a implicature diverse a partire dallo stesso contenuto semantico.

Più profondamente, possiamo usare coomologia per studiare ostruzioni alla coerenza globale di implicature. Se in diverse regioni contestuali le implicature sono incompatibili (per esempio, in  $U_1$  impliciamo  $p$ , in  $U_2$  impliciamo  $\neg p$ , e  $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ ), allora il ricoprimento  $\{U_1, U_2\}$  genera un 1-cociclo non banale, contribuendo a  $H^1(X, F_{\text{implicature}}) \neq 0$ . Questo misura l'incoerenza globale delle implicature, una situazione che può sorgere in contesti pragmatici complessi.

## Presupposizioni, Polisemia e Semantica Cognitiva

### 29.5.3 Presupposizioni come Sotto-Fasci Rigidi: Formalizzazione della Proiezione

Il trattamento delle presupposizioni attraverso sotto-fasci rigidi che abbiamo sviluppato nel Capitolo 11 fornisce una soluzione elegante e matematicamente precisa al problema della proiezione presupposizionale che ha afflitto la semantica vero-condizionale per decenni. Ricapitoliamo e approfondiamo questa analisi nel contesto del confronto teorico.

Nella semantica vero-condizionale classica, le presupposizioni presentano un dilemma: o le trattiamo come parte delle condizioni di verità (approccio russelliano alle descrizioni definite), ma allora non spieghiamo perché si proiettano attraverso negazione, interrogazione, modalità; oppure le trattiamo come condizioni di felicità separate dalle condizioni di verità (approcci trivalenti, logiche parziali), ma allora complichiamo drammaticamente la semantica compositiva e perdiamo l'eleganza della bivalenza classica.

L'approccio dei fasci dissolve questo dilemma reinterpretandolo geometricamente. Le presupposizioni non sono né condizioni di verità né condizioni di felicità totalmente separate, ma componenti semantiche con proprietà topologiche specifiche: formano sotto-fasci rigidi del fascio semantico complessivo.

Formalmente, sia  $F_{\text{sem}}$  il fascio semantico totale che assegna a ogni regione contestuale  $U \subseteq X$  l'insieme delle interpretazioni complete (asserzioni, presupposizioni, implicature). Definiamo il sotto-fascio presupposizionale:

$$F_{\text{presup}} \subseteq F_{\text{sem}}$$

dove per ogni aperto  $U$ ,  $F_{\text{presup}}(U)$  consiste delle componenti presupposizionali delle sezioni in  $F_{\text{sem}}(U)$ .

La rigidità di  $F_{\text{presup}}$  è formalizzata come invarianza sotto trasformazioni sintattiche  $\tau: X \rightarrow X$  indotte da operatori come negazione, interrogazione, modalizzazione. Una trasformazione  $\tau_{\text{neg}}$  indotta dalla negazione mappa un contesto  $c = (c_{\text{ling}}, c_{\text{sem}}, c_{\text{pol}}, \dots)$  a un contesto  $c_{\text{neg}} = (c_{\text{ling}}, c_{\text{sem}}, \neg c_{\text{pol}}, \dots)$  dove la polarità assertiva è invertita.

La rigidità richiede che il pullback (immagine inversa) del fascio presupposizionale lungo  $\tau_{\text{neg}}$  sia isomorfo al fascio presupposizionale stesso:

$$\tau_{\text{neg}}^*(F_{\text{presup}}) \cong F_{\text{presup}}$$

Concretamente, questo significa: se  $p$  è una presupposizione nel contesto  $c$  ( $p \in F_{\text{presup}}(U)$  per qualche aperto  $U \ni c$ ), allora  $p$  rimane presupposizione nel contesto trasformato  $c_{\text{neg}} = \tau_{\text{neg}}(c)$ . La trasformazione  $\tau_{\text{neg}}$  non "tocca" le sezioni presupposizionali.

Questa formalizzazione cattura precisamente il fenomeno della proiezione: "Giovanni ha smesso di fumare" presuppone che Giovanni fumava precedentemente, e questa presupposizione si proietta intatta attraverso negazione ("Giovanni non ha smesso di

fumare"), interrogazione ("Giovanni ha smesso di fumare?"), modalità ("È possibile che Giovanni abbia smesso di fumare"), condizionalizzazione ("Se Giovanni ha smesso di fumare, ..."), perché tutte queste operazioni corrispondono a trasformazioni  $\tau$  che lasciano invariante  $F\_presup$ .

I filtri presupposizionali (contesti che bloccano proiezione) sono modellati come trasformazioni che non preservano  $F\_presup$ , o come morfismi:

$$\varphi\_filter: F\_presup(U\_embedded) \rightarrow F\_presup(U\_matrix)$$

che possono essere non surgettivi o addirittura nulli. Per esempio, nel condizionale "Se Giovanni fumava, allora ha smesso di fumare", la presupposizione del conseguente ("Giovanni fumava") è filtrata perché l'antecedente afferma esplicitamente la stessa proposizione. Il morfismo  $\varphi\_filter\_condizionale$  mappa questa presupposizione a zero (non proietta al livello matrix).

L'accomodazione presupposizionale (aggiornamento del common ground per includere una presupposizione non precedentemente condivisa) è modellata come sheafification locale del fascio del common ground:

$$F\_CG \mapsto F\_CG^+ = \text{sheafification di } (F\_CG \cup \{p\})$$

Se  $p$  è compatibile con tutte le sezioni esistenti di  $F\_CG$  (non contraddice informazioni nel common ground), la sheafification riesce producendo un fascio esteso. Se  $p$  è incompatibile, la sheafification fallisce o produce strutture degenerate, segnalando che l'accomodazione è impossibile senza revisione maggiore dello stato conversazionale.

Questo trattamento ha vantaggi sostanziali rispetto alla semantica vero-condizionale:

1. **Unificazione:** Presupposizioni, asserzioni, implicature sono tutte componenti dello stesso fascio semantico, distinte per proprietà topologiche (rigidità, variabilità) piuttosto che per appartenenza a livelli teorici separati.
2. **Predittività:** La teoria predice quali trasformazioni preservano presupposizioni (quelle che inducono isomorfismi di  $F\_presup$ ) e quali le filtrano (quelle che inducono morfismi non iniettivi).
3. **Gradualità:** Possiamo modellare presupposizioni "hard" vs "soft" come differenze di grado di rigidità:  $F\_presup\_hard$  è massimalmente rigido (invariante sotto tutte le trasformazioni rilevanti),  $F\_presup\_soft$  è parzialmente rigido.
4. **Compositività:** Le mappe di restrizione garantiscono che la proiezione presupposizionale sia compositiva: presupposizioni di parti composte si combinano coerentemente per formare presupposizioni del tutto.

#### 29.5.4 Polisemia come Struttura di Fascio Non-Globalmente-Incollabile



La polisemia, fenomeno pervasivo nel lessico delle lingue naturali, ha ricevuto trattamenti variamente insoddisfacenti nella semantica vero-condizionale. L'approccio enumerativo (molti significati discreti  $\text{banco}_1$ ,  $\text{banco}_2$ , ... memorizzati separatamente nel lessico) perde generalizzazioni sistematiche e non spiega produttività. L'approccio sotto-specificazionale (significato unico astratto che si precisa contestualmente) fatica a catturare che certe accezioni sono così distinte da resistere a unificazione.

La teoria dei fasci offre una terza via concettualmente naturale: la polisemia è modellata come prefascio (non fascio completo) con sezioni locali distinte che falliscono di incollare globalmente quando le loro restrizioni a sovrapposizioni contestuali sono incompatibili.

Consideriamo ancora il caso paradigmatico di "banco". Il prefascio  $F_{\text{banco}}$  assegna a diverse regioni contestuali interpretazioni localmente coerenti:

- $F_{\text{banco}}(U_{\text{banca}}) = \{\sigma_{\text{banca}}\}$ : interpretazione "sportello bancario"
- $F_{\text{banco}}(U_{\text{scuola}}) = \{\sigma_{\text{scuola}}\}$ : interpretazione "mobile scolastico"
- $F_{\text{banco}}(U_{\text{mercato}}) = \{\sigma_{\text{mercato}}\}$ : interpretazione "banco di vendita"
- $F_{\text{banco}}(U_{\text{tribunale}}) = \{\sigma_{\text{tribunale}}\}$ : interpretazione "banco degli imputati"

Ora consideriamo l'unione  $U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}}$ . Se questa intersezione è vuota ( $U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}} = \emptyset$ ), non c'è problema: possiamo definire una sezione a pezzi su  $U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}}$  che è  $\sigma_{\text{banca}}$  su  $U_{\text{banca}}$  e  $\sigma_{\text{scuola}}$  su  $U_{\text{scuola}}$ .

Ma se l'intersezione è non vuota (esistono contesti simultaneamente bancari e scolastici, per esempio una lezione di economia bancaria in università dove si discutono sia banchi fisici dell'aula sia banchi istituzionali finanziari), allora dobbiamo verificare compatibilità:

$$\sigma_{\text{banca}}|_{\{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}\}} \stackrel{?}{=} \sigma_{\text{scuola}}|_{\{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}\}}$$

Queste restrizioni sono interpretazioni incompatibili (un banco fisico scolastico non è uno sportello bancario), quindi la condizione di compatibilità fallisce. Non possiamo incollare  $\sigma_{\text{banca}}$  e  $\sigma_{\text{scuola}}$  in una sezione globale coerente.

Questo fallimento dell'incollamento è precisamente la polisemia: abbiamo interpretazioni locali valide in diverse regioni contestuali che non possono essere unificate in un'interpretazione singola globale perché entrano in conflitto sulle sovrapposizioni.

La coomologia di Čech misura questo fallimento. Consideriamo il ricoprimento  $\{U_{\text{banca}}, U_{\text{scuola}}\}$  dell'unione  $U = U_{\text{banca}} \cup U_{\text{scuola}}$ . La famiglia di sezioni locali  $\{\sigma_{\text{banca}}, \sigma_{\text{scuola}}\}$  forma una 0-cocatena. Il suo cobordo:

$$\delta^0(\sigma_{\text{banca}}, \sigma_{\text{scuola}})|_{\{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}\}} = \sigma_{\text{banca}}|_{\{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}\}} - \sigma_{\text{scuola}}|_{\{U_{\text{banca}} \cap U_{\text{scuola}}\}}$$

è non nullo perché le restrizioni differiscono. Se questa discrepanza non è un cobordo (non esiste rinormalizzazione che la elimina), contribuisce a:

$$H^1(U, F_{\text{banco}}) \neq 0$$

Il primo gruppo di coomologia è non banale, misurando l'ostruzione coomologica all'incollamento, ovvero la polisemia irriducibile.

Questo framework permette di distinguere formalmente:

**Polisemia sistematica e produttiva** (libro fisico vs contenuto, città geografia vs popolazione): Il prefascio ha struttura regolare. Le interpretazioni locali differiscono lungo dimensioni prevedibili (FISICO vs INFORMAZIONE, LUOGO vs ABITANTI). Possiamo definire morfismi:

$\varphi_{\text{materializzazione}}: F_{\text{informazione}} \rightarrow F_{\text{fisico}}$   $\varphi_{\text{localizzazione}}: F_{\text{popolazione}} \rightarrow F_{\text{geografia}}$

che generano accezioni sistematicamente. La coomologia potrebbe essere strutturata, con cocicli che corrispondono a pattern sistematici.

**Polisemia idiosincratice** (banco nelle sue varie accezioni): Le interpretazioni sono più arbitrarie, storicamente contingenti. La coomologia è meno strutturata.

**Monosemia con sottodeterminazione**: Se le interpretazioni locali sono tutte specializzazioni coerenti di un nucleo astratto comune, allora incollano globalmente. La sheafification del prefascio produce un fascio con sezione globale sottodeterminata che specializza localmente.  $H^1 = 0$ .

Questa tricotomia è testabile empiricamente attraverso esperimenti psicolinguistici: polisemia sistematica mostra priming cross-accezioni, polisemia idiosincratice non mostra priming, monosemia mostra priming completo.

## 29.6 Semantica Vero-Condizionale vs Fasci: Bilancio Comparativo

Dopo aver esaminato in dettaglio come l'approccio dei fasci affronta le limitazioni della semantica vero-condizionale, è opportuno un bilancio comparativo esplicito lungo le dimensioni di valutazione identificate all'inizio.

**Rigore Formale**: Entrambi gli approcci sono matematicamente rigorosi, ma in modi diversi. La semantica vero-condizionale usa logica del primo ordine, teoria dei modelli, algebra booleana. I fasci usano topologia algebrica, teoria delle categorie, coomologia. Nessuno dei due è intrinsecamente più rigoroso, ma i fasci offrono strumenti per fenomeni (dipendenza locale, ostruzioni all'incollamento) che la logica classica non cattura naturalmente.

**Potere Esplicativo**: I fasci hanno maggiore potere esplicativo su:

- Dipendenza contestuale pervasiva e sistematica
- Polisemia e sottodeterminazione semantica
- Proiezione presupposizionale e filtri
- Implicature come epifenomeni strutturali

La semantica vero-condizionale ha maggiore potere su:

- Conseguenza logica e ragionamento deduttivo formale

- Composizionalità rigorosa di tipo montaguiano
- Semantica di linguaggi formali (matematica, logica, programmazione)

**Plausibilità Cognitiva:** Qui gli approcci divergono significativamente. La semantica vero-condizionale richiede che parlanti rappresentino mentalmente condizioni di verità, mondi possibili, funzioni da mondi a estensioni. Questo è cognitivamente astratto e richiede capacità metalinguistiche sofisticate. I fasci sono ancora più astratti (topologie, sezioni, coomologia) ma possono essere reinterpretati come rappresentazioni distribuite di interpretazioni locali con vincoli di coerenza, più vicino a come informazione contestuale potrebbe essere elaborata neuralmente.

**Composizionalità:** La semantica vero-condizionale ha composizionalità rigorosa garantita per costruzione attraverso clausole ricorsive. I fasci hanno composizionalità topologica: morfismi tra fasci rispettano struttura locale, garantendo che composizione semantica preservi coerenza contestuale. La composizionalità dei fasci è più flessibile (permette variazione contestuale) ma potenzialmente meno trasparente.

**Implementabilità Computazionale:** La semantica vero-condizionale è facilmente implementabile in sistemi di theorem proving, SAT solvers, model checkers. I fasci richiedono strutture dati più complesse (spazi topologici discreti, mappe di restrizione) ma sono implementabili come abbiamo mostrato nel Capitolo 9. L'efficienza dipende dalla dimensionalità dello spazio contestuale.

**Conclusione Provvisoria:** Gli approcci non sono mutuamente esclusivi ma complementari. Per linguaggi formali, ragionamento logico, semantica compositiva rigorosa in domini ristretti, la semantica vero-condizionale eccelle. Per dipendenza contestuale, polisemia, fenomeni pragmatici sistematici, i fasci offrono strumenti superiori. Una teoria semantica completa potrebbe integrare entrambi: semantica vero-condizionale come struttura locale dei fasci (sezioni su aperti sono interpretazioni vero-condizionali), topologia dei fasci come architettura globale che gestisce dipendenza contestuale.

## Semantica Cognitiva - Fondamenti e Confronto

### 29.7 Semantica Cognitiva: Assunzioni Fondazionali e Architettura Teorica

La semantica cognitiva, sviluppatasi principalmente negli anni '70 e '80 attraverso il lavoro di George Lakoff, Ronald Langacker, Leonard Talmy, e altri, rappresenta una rottura radicale con la tradizione formalista della semantica vero-condizionale. Mentre quest'ultima cerca di modellare il significato attraverso relazioni logiche tra espressioni linguistiche e mondo (mediati attraverso modelli formali), la semantica cognitiva sostiene che il significato linguistico è fondamentalmente radicato, ancorato, embodied nella cognizione umana generale, nelle strutture percettive e motorie del corpo, nelle capacità immaginative e metaforiche della mente.

Le assunzioni fondazionali della semantica cognitiva possono essere articolate attraverso diverse tesi interconnesse che costituiscono il nucleo teorico del programma di ricerca:

### 29.7.1 La Tesi dell'Embodiment: Radicamento Corporeo del Significato

La tesi centrale, più radicale e filosoficamente provocatoria della semantica cognitiva è che il significato non è relazione astratta tra simboli e mondo mediata da logica formale, ma emerge dalle strutture sensomotorie del corpo umano in interazione con l'ambiente fisico. I concetti, i significati delle parole, non sono arbitrari né puramente convenzionali, ma riflettono la natura del nostro apparato percettivo, della nostra anatomia, delle nostre capacità motorie, delle nostre esperienze corporee ricorrenti.

Consideriamo concetti spaziali fondamentali come "dentro", "fuori", "sopra", "sotto", "davanti", "dietro". Secondo la semantica cognitiva, questi concetti non sono primitivi logici definiti assiomaticamente, né sono semplicemente relazioni geometriche oggettive nello spazio fisico. Piuttosto, emergono da schemi immagine (image schemas) che si sviluppano attraverso esperienza corporea ripetuta.

Lo schema immagine di CONTENIMENTO, per esempio, deriva da esperienze corporee primarie:

- Il nostro corpo come contenitore (mettere cibo in bocca, aria nei polmoni)
- Noi come contenuti (essere in una stanza, dentro una scatola)
- Manipolazione di contenitori (riempire bicchieri, svuotare scatole)

Attraverso queste esperienze ricorrenti, sviluppiamo una struttura schematica astratta:

- CONTENITORE con INTERNO, ESTERNO, CONFINE
- Logica topologica: se X è dentro C e Y è dentro X, allora Y è dentro C (transitività)
- Se X è dentro C, allora X non è fuori da C (esclusione)

Questa struttura schematica corporalmente motivata diventa poi la base per comprendere "dentro" linguisticamente. Ma crucialmente, attraverso metafora concettuale, lo schema di CONTENIMENTO viene proiettato sistematicamente su domini astratti:

- Stati emotivi come contenitori: "Cadere in depressione", "Uscire dalla tristezza"
- Eventi come contenitori: "Essere in una relazione", "Entrare in una fase difficile"
- Categorie come contenitori: "Rientrare nella categoria", "Al di fuori della norma"

Il significato di "dentro" non è quindi riducibile a condizioni di verità geometriche, ma è una rete complessa di strutture sensomotorie, schemi immagine, proiezioni metaforiche, radicata ultimamente nell'esperienza corporea.

### 29.7.2 La Tesi della Categorizzazione Prototipica: Contro l'Essenzialismo Classico

La semantica vero-condizionale classica, seguendo la tradizione filosofica da Aristotele a Frege, assume che categorie concettuali siano definite attraverso condizioni necessarie e sufficienti: un oggetto x appartiene alla categoria C se e solo se x possiede tutte le proprietà  $P_1, P_2, \dots, P_n$  che definiscono C. Le categorie hanno confini netti, membri sono ugualmente buoni esempi della categoria (soddisfano tutte le condizioni definitorie), non ci sono gradi di appartenenza.

La semantica cognitiva, basandosi su evidenze psicologiche pioneristiche di Eleanor Rosch e altri, rigetta questo modello classico sostenendo che la maggior parte delle categorie naturali sono organizzate intorno a prototipi: esempi centrali, migliori, più salienti che incarnano la categoria in modo paradigmatico. L'appartenenza alla categoria è questione di grado: alcuni membri sono prototipici, altri periferici, altri borderline.

Consideriamo la categoria UCCELLO. Il modello classico richiederebbe condizioni necessarie e sufficienti:

- Ha piume
- Ha becco
- Ha ali
- Depone uova
- ...

Ma questo fallisce empiricamente: pinguini e struzzi non volano, molti non-uccelli hanno piume (alcuni dinosauri), alcuni uccelli sono vivipari (casi anomali).

Il modello prototipico invece sostiene:

- Prototipo centrale: pettirosso, passero (membri prototipici per parlanti nordamericani/europei)
- Membri meno prototipici: pollo, anatra (più periferici)
- Membri borderline: pinguino, struzzo (marginali)

Gli effetti prototipici sono misurabili sperimentalmente:

- Tempi di reazione: più veloci per giudizi su membri prototipici ("Un pettirosso è un uccello?" risposta più rapida che "Un pinguino è un uccello?")
- Ordine di acquisizione: bambini apprendono membri prototipici prima dei periferici
- Sostituibilità in contesti linguistici: "Guardati da quell'uccello!" si riferisce più naturalmente a un corvo che a uno struzzo

La struttura prototipica non è arbitraria ma riflette salienze percettive, frequenze statistiche nell'ambiente, rilevanza funzionale. Uccelli prototipici sono quelli che voliamo, di taglia media, che incontriamo frequentemente nell'esperienza quotidiana.

### **29.7.3 La Tesi della Metafora Concettuale: Struttura Trasversale del Significato**

Una delle innovazioni più influenti della semantica cognitiva è la teoria della metafora concettuale di Lakoff e Johnson. Contrariamente alla visione tradizionale che tratta le metafore come ornamenti retorici, deviazioni dal linguaggio letterale, figure poetiche opzionali, Lakoff e Johnson argomentano che la metafora è meccanismo cognitivo fondamentale, pervasivo, sistematico attraverso cui comprendiamo domini astratti in termini di domini concreti più direttamente esperiti.

Le metafore concettuali sono mappature sistematiche cross-domain:

ARGUMENT IS WAR (L'ARGOMENTAZIONE È GUERRA)

- Dominio sorgente (source): guerra, conflitto militare
- Dominio target: argomentazione, dibattito intellettuale
- Mappature sistematiche:
  - Argomentatori → Combattenti
  - Posizioni argomentative → Posizioni militari fortificate
  - Critiche → Attacchi
  - Difese logiche → Difese militari
  - Vincere un dibattito → Vincere una battaglia
  - Strategia retorica → Strategia militare

Questa metafora non è semplicemente figura retorica ma struttura sistematicamente il nostro linguaggio sull'argomentazione:

- "Ha attaccato ogni punto debole nel mio argomento"
- "Le sue critiche hanno colpito nel segno"
- "Ho demolito il suo argomento"
- "Non ho mai vinto un dibattito con lui"
- "Dobbiamo cambiare strategia"

Crucialmente, la metafora è unidirezionale: mappiamo dalla guerra (dominio concreto, fisico, percettivamente accessibile) all'argomentazione (dominio astratto, intellettuale). L'inverso non funziona: non concettualizziamo guerre come dibattiti intellettuali.

Le metafore concettuali sono sistematiche: un'intera rete di inferenze si trasferisce dal dominio sorgente al target. Se concettualizzo argomentazione come guerra, eredito una struttura ricca:

- Le guerre hanno vincitori e vinti → I dibattiti hanno vincitori e vinti
- Nelle guerre si usano armi → Nei dibattiti si usano "armi retoriche"
- Le guerre richiedono strategia → I dibattiti richiedono strategia retorica

La teoria prevede che metafore concettuali non sono arbitrarie ma motivate da correlazioni nell'esperienza. ARGUMENT IS WAR emerge perché argomentazioni coinvolgono spesso conflitto interpersonale, opposizione di posizioni, competizione. TIME IS SPACE emerge perché il tempo è co-esperito con movimento nello spazio (eventi futuri sono "avanti", passati "dietro").

## 29.8 Punti di Forza della Semantica Cognitiva

### 29.8.1 Potere Esplicativo su Fenomeni Non-Logici

La semantica cognitiva eccelle nello spiegare fenomeni semantici che sfuggono o sono trattati in modo ad hoc dalla semantica formale:

**Polisemia sistematica e regolare:** Patterns come CONTENITORE → CONTENUTO ("Ho bevuto una bottiglia" = contenuto), ISTITUZIONE → EDIFICIO → PERSONE ("La Casa Bianca ha rilasciato un comunicato"), ANIMALE → CARNE ("Mangiare pollo") non sono accidenti lessicali ma riflettono principi cognitivi generali di metonimia concettuale. La

semantica cognitiva prevede quali polisemie sono possibili cross-linguisticamente (quelle motivate da correlazioni esperienziali) e quali rare o impossibili.

**Metafore sistematiche:** La pervasività di metafore come IDEE SONO OGGETTI, COMPRENDERE È AFFERRARE, DIFFICOLTÀ SONO PESI è spiegata non stipulativamente ma attraverso radicamento embodied. "Afferrare un concetto" deriva dalla metafora COMPRENDERE È AFFERRARE FISICAMENTE, motivata dall'esperienza infantile che comprensione spesso accompagna manipolazione fisica di oggetti.

**Effetti prototipici:** Asimmetrie nella categorizzazione (pettirosso più prototipico di pinguino come uccello), effetti di tipicità nei tempi di reazione, gradualità dell'appartenenza categoriale sono predette e spiegate naturalmente dal modello prototipico, mentre richiedono meccanismi aggiuntivi complessi nel modello classico.

**Significato costruzionale:** Costruzioni grammaticali idiomatiche come "X drives Y crazy", "The Xer, the Yer" hanno significati che non sono puramente compositivi (non derivabili sommando significati delle parole) ma emergono dalla costruzione come unità form-meaning pairing. La grammatica delle costruzioni, framework alleato alla semantica cognitiva, tratta queste costruzioni non come eccezioni ma come centrale alla competenza linguistica.

### 29.8.2 Integrazione con Scienze Cognitive e Neuroscienze

La semantica cognitiva si integra naturalmente con ricerca in psicologia cognitiva, neuroscienza cognitiva, acquisizione linguistica. L'embodiment è testabile empiricamente attraverso esperimenti comportamentali e neuroimaging.

Studi mostrano che comprendere frasi di azione ("calciare la palla") attiva aree motorie cerebrali (corteccia motoria) associate all'azione descritta. Comprendere metafore spaziali ("Domani è il giorno dopo oggi") attiva circuiti spaziali. Questo supporta tesi embodiment: significato linguistico riassume architetture neurali sensomotorie.

Studi di sviluppo cognitivo mostrano che bambini acquisiscono schemi immagine (CONTENIMENTO, SUPPORTO, EQUILIBRIO) molto precocemente attraverso interazione fisica, e questi schemi forniscono struttura per apprendimento lessicale successivo. Bambini comprendono "dentro" e "fuori" prima di apprendere le parole corrispondenti, suggerendo priorità cognitiva dello schema sul linguaggio.

### 29.8.3 Potere Predittivo Cross-Linguistico

Se il significato è radicato in cognizione embodied universale (tutti gli umani hanno corpi simili, percepiscono in modi simili), la semantica cognitiva predice universali semantici: metafore concettuali, schemi immagine, pattern di polisemia che ricorrono cross-linguisticamente perché riflettono strutture cognitive universali piuttosto che convenzioni arbitrarie.

Evidenza: molte metafore concettuali ricorrono in lingue non correlate. FELICE È SU / TRISTE È GIÙ si trova in Inglese ("I'm feeling up/down"), Cinese, Giapponese, lingue indigene americane. Questo è predetto dall'embodiment: postura corporea eretta è correlata con emozioni positive, postura curvata con emozioni negative, universalmente.

LIFE IS A JOURNEY è pervasiva cross-linguisticamente: "Siamo a un bivio", "Ha perso la strada", "È arrivato lontano nella vita". Motivazione: la vita coinvolge letteralmente movimento attraverso spazio e tempo, fornendo base esperienziale per la metafora.

## 29.9 Limitazioni e Criticità della Semantica Cognitiva

Nonostante i suoi successi nell'illuminare aspetti embodied e metaforici del significato, la semantica cognitiva presenta limitazioni serie che ne minano la plausibilità come teoria semantica completa e esclusiva.

### 29.9.1 Mancanza di Rigore Formale e Precisione

La critica più frequente alla semantica cognitiva è la mancanza di rigore formale. Concetti chiave come "schema immagine", "metafora concettuale", "proiezione metaphorica", "blending concettuale" rimangono vaghi, definiti principalmente attraverso esempi e caratterizzazioni informali piuttosto che definizioni matematiche precise.

Questo rende la teoria difficile da testare rigorosamente. Cosa conta esattamente come schema immagine? Quanti schemi esistono? Come si individuano empiricamente? Le risposte sono spesso impressionistiche. Lakoff e Johnson identificano schemi come CONTENIMENTO, PERCORSO, COLLEGAMENTO, FORZA, ma i criteri per individuarli non sono espliciti. Altri ricercatori propongono schemi diversi senza metodologia standard per risolvere disaccordi.

Similmente, le metafore concettuali: quando due domini sono connessi da metafora concettuale vs similarità superficiale? "Amore è viaggio" ("Siamo a un bivio nella relazione") è metafora concettuale sistematica o semplice somiglianza notata occasionalmente? I criteri (sistematicità, unidirezionalità, motivazione esperienziale) sono spesso applicati post-hoc piuttosto che predittivamente.

Manca formalizzazione compositiva: come i significati di parole individuali si compongono per formare significati frasali? La semantica cognitiva enfatizza costruzioni olistiche ma fatica a specificare algoritmi compositivi precisi. Per frasi complesse, dipendono spesso da intuizioni case-by-case piuttosto che derivazioni sistematiche.

### 29.9.2 Sottostima di Aspetti Logici e Vero-Condizionali

La semantica cognitiva, nella sua reazione contro formalismo logicista, rischia di buttare via il bambino con l'acqua sporca. Certi aspetti del significato linguistico sono genuinamente logici, vero-condizionali, composizionali in modi che l'embodiment non cattura facilmente.

Consideriamo inferenze logiche:

- "Tutti gli studenti hanno passato" implica logicamente "Giovanni ha passato" (se Giovanni è studente)
- "Non tutti gli studenti hanno passato" è compatibile con "Alcuni studenti hanno passato"
- "Se piove allora la strada è bagnata" e "Piove" implicano congiuntivamente "La strada è bagnata" (Modus Ponens)



Queste inferenze sono formali, valide in virtù della struttura logica indipendentemente dal contenuto. La semantica cognitiva non ha molto da dire su questo: schemi immagine e metafore non generano logica formale. Dobbiamo supplementare con teoria vero-condizionale per catturare questo aspetto.

Linguaggio matematico e scientifico: "Per ogni epsilon maggiore di zero esiste delta..." La semantica cognitiva strugge con linguaggio quantificazionale formale che sembra distaccato da embodiment sensorimotorio diretto. Sì, potremmo invocare metafore (QUANTITÀ SONO OGGETTI), ma questo non cattura la precisione logica che rende matematica rigorosa.

### **29.9.3 Sovragerazione di Metafore e Problema della Falsificabilità**

Una critica metodologica seria riguarda la potenziale sovragerazione di analisi metaforiche. Se quasi qualunque dominio astratto può essere analizzato come strutturato metaforicamente da domini concreti, e se i criteri per identificare metafore concettuali sono flessibili, la teoria rischia di diventare non falsificabile: qualunque dato linguistico può essere "spiegato" postulando metafore concettuali appropriate.

Per esempio, linguaggio temporale usa estensivamente metafore spaziali: "Natale si avvicina", "Il futuro è davanti", "Guardiamo indietro al passato". Lakoff e Johnson analizzano questo come metafore TIME IS SPACE, FUTURE IS AHEAD, PAST IS BEHIND. Ma come testiamo questa analisi? Quasi qualunque uso di termini spaziali in contesti temporali può essere assimilato sotto queste metafore.

Il problema si aggrava quando metafore concettuali diverse sembrano in tensione. TEMPO È DENARO ("Sprecare tempo", "Risparmiare tempo") vs TEMPO È FIUME ("Il tempo scorre", "Il flusso degli eventi"). Entrambe sono postulate come metafore concettuali dell'Inglese. Ma quando predicono comportamenti linguistici diversi? Senza criteri rigorosi per quando una metafora è attiva vs inattiva, la teoria perde potere predittivo.

### **29.9.4 Questioni di Acquisizione e Universalità**

L'embodiment predice che significati linguistici dovrebbero emergere da esperienze corporee universali, quindi dovremmo trovare universalità semantica sostanziale. Ma cross-linguisticamente c'è variazione significativa che è difficile riconciliare con embodiment universale.

Sistemi spaziali: lingue differiscono drammaticamente nel modo di codificare spazio. Inglese usa frame egocentrici (left/right rispetto al corpo), altre lingue usano sistemi geocentrici assoluti (nord/sud/est/ovest indipendentemente dall'orientamento corporeo). Queste differenze hanno conseguenze cognitive: parlanti di lingue geocentriche mantengono orientamento cardinale costantemente, anche al chiuso.

Se schemi spaziali sono embodied universali, perché questa variazione? La semantica cognitiva deve ammettere che cultura e linguaggio stesso modellano cognizione (ipotesi Sapir-Whorf), ma questo indebolisce la tesi che embodiment universale determina significato.

Metafore temporali: non tutte le lingue concettualizzano tempo come "avanti/dietro" rispetto alla direzione del corpo. Aymara (lingua andina) inverte: il passato è "avanti" (visibile, conosciuto), il futuro "dietro" (invisibile, sconosciuto). Questo suggerisce che metafore temporali non sono univocamente determinate da embodiment ma ammettono variazione culturale.

## 29.10 Come i Fasci Semantici Integrano Intuizioni Cognitive

L'approccio dei fasci non è incompatibile con la semantica cognitiva ma può integrare molte delle sue intuizioni corrette fornendo simultaneamente rigore formale che le manca. Esaminiamo come.

### 29.10.1 Schemi Immagine come Strutture Topologiche sullo Spazio Contestuale

Gli schemi immagine della semantica cognitiva possono essere formalizzati come strutture topologiche privilegiate sullo spazio contestuale  $X$ . Uno schema immagine non è semplicemente "concetto astratto vago" ma specifica una topologia, ovvero una struttura di aperti che codifica relazioni di vicinanza, inclusione, connessione rilevanti per il dominio percettivo.

Consideriamo lo schema CONTENIMENTO. Formalmente, questo corrisponde a una relazione spaziale tra regioni:

- Contenitore  $C$ : aperto  $U_C \subseteq X_{\text{spazio}}$  (spazio delle configurazioni spaziali)
- Contenuto  $c$ : punto  $c \in X_{\text{entità}}$
- Relazione:  $c \text{ DENTRO } C \Leftrightarrow c \in U_C$  ( $c$  appartiene all'aperto del contenitore)

La logica topologica dello CONTENIMENTO emerge dalle proprietà della topologia:

- Transitività: se  $c \in U_{C_1}$  e  $U_{C_1} \subseteq U_{C_2}$ , allora  $c \in U_{C_2}$
- Esclusione: se  $c \in \text{Int}(U_C)$ , allora  $c \notin X \setminus \text{Cl}(U_C)$  (interno esclude esterno chiuso)
- Bordo:  $c \in \partial U_C$  rappresenta posizione borderline (né chiaramente dentro né fuori)

Questa formalizzazione cattura struttura dello schema CONTENIMENTO rigorosamente, permettendo derivazioni formali. Ma preserva l'intuizione cognitiva: la topologia modella relazioni percettive di contenimento spaziale.

Le proiezioni metaforiche diventano morfismi tra spazi topologici:

$$\varphi_{\text{metaf}}: (X_{\text{spazio}}, \tau_{\text{spazio}}) \rightarrow (X_{\text{astratto}}, \tau_{\text{astratto}})$$

Questo morfismo mappa:

- Contenitori spaziali  $\rightarrow$  Categorie concettuali
- Oggetti contenuti  $\rightarrow$  Membri della categoria
- Relazione DENTRO  $\rightarrow$  Relazione di appartenenza categoriale

Il morfismo preserva (parzialmente) struttura topologica: se  $c_1$  è vicino a  $c_2$  nello spazio fisico (topologicamente), allora  $\varphi(c_1)$  è vicino a  $\varphi(c_2)$  nello spazio astratto. Questo cattura sistematicità della proiezione metaforica.

### 29.10.2 Prototipi come Centri Topologici di Fasci di Categorizzazione

La struttura prototipica delle categorie può essere modellata attraverso fasci con sezioni concentrate intorno a "centri" topologici. Consideriamo il fascio  $F_{\text{uccello}}$  che assegna a ogni regione contestuale l'insieme delle interpretazioni di "uccello":

$F_{\text{uccello}}(U) = \{\text{funzioni } \mu: U \rightarrow [0,1] \text{ che assegnano a ogni esemplare potenziale } e \in U \text{ un grado di appartenenza alla categoria}\}$

Il prototipo è il punto (o regione)  $e_{\text{proto}}$  dove  $\mu(e_{\text{proto}}) = 1$  (grado massimo), e  $\mu$  decresce topologicamente con la distanza da  $e_{\text{proto}}$ . Esemplari topologicamente vicini al prototipo (pettirossi, passerì) hanno  $\mu$  alto, esemplari lontani (pinguini, struzzi) hanno  $\mu$  basso.

La topologia codifica somiglianze rilevanti: due esemplari sono vicini se condividono molte proprietà percettivamente salienti (dimensioni, forma, capacità di volo, habitat tipico).

Le mappe di restrizione  $\rho_{\{U,V\}}$  modellano come la categoria si specializza contestualmente. In  $U_{\text{quotidiano}}$  (contesti di esperienza quotidiana), il prototipo potrebbe essere pettirosso. In  $U_{\text{zoologico}}$  (contesti scientifici zoologici), la categoria si uniformizza (tutti gli uccelli diventano egualmente buoni esemplari scientificamente), il prototipo diventa meno saliente.

Questo framework permette:

- Rigore formale: gradi di appartenenza sono funzioni continue esplicite
- Preservazione di intuizioni cognitive: prototipi emergono come centri topologici
- Predittività: effetti prototipici sono derivabili dalla geometria del fascio

### 29.10.3 Metafore Concettuali come Morfismi Sistemati tra Fasci

Abbiamo già discusso nel Capitolo 16 come metafore concettuali possano essere modellate come morfismi tra fasci su spazi concettuali diversi:

$\phi_{\text{ARGUMENT\_IS\_WAR}}: F_{\text{guerra}} \rightarrow F_{\text{argomento}}$

Questo morfismo mappa sistematicamente:

- Sezioni del fascio guerra (strategie militari, attacchi, difese)  $\rightarrow$  Sezioni del fascio argomento (strategie retoriche, critiche, contro-argomenti)
- Preservando struttura topologica: relazioni di vicinanza nel dominio sorgente sono mappate a relazioni di vicinanza nel dominio target

La sistematicità della metafora è catturata dalla condizione che  $\phi$  sia morfismo di fasci, rispettando mappe di restrizione:

$$\rho^{\{\text{argomento}\}}_{\{V_1, V_2\}} \circ \phi_{\{U_{\text{guerra}}\}} = \phi_{\{U_{\text{guerra}}\}} \circ \rho^{\{\text{guerra}\}}_{\{V_1, V_2\}}$$

Specializzare interpretazioni belliche e poi metaforizzare = metaforizzare e poi specializzare interpretazioni argomentative.

L'unidirezionalità della metafora (mappiamo da guerra a argomento, non viceversa) può essere modellata come non invertibilità del morfismo:  $\phi$  non ha inverso  $\phi^{-1}$  ben definito perché è surgettivo ma non iniettivo (molte strutture belliche collassano su meno strutture argomentative).

Il radicamento embodied è incorporato nella scelta degli spazi:  $X_{\text{guerra}}$  è spazio più "concreto", vicino a esperienza sensomotoria (azioni fisiche, percezioni visive di conflitti), mentre  $X_{\text{argomento}}$  è più "astratto". La direzione della metafora va dal concreto/embodied all'astratto/disembodied, principio generale catturabile topologicamente.

#### 29.10.4 Polisemia Regolare come Fasci con Cocicli Sistemati

Abbiamo visto che polisemia può essere modellata attraverso struttura coomologica. La semantica cognitiva osserva che certa polisemia è sistematica, produttiva, cross-linguistica (CONTENITORE  $\rightarrow$  CONTENUTO, ANIMALE  $\rightarrow$  CARNE, ALBERO  $\rightarrow$  LEGNO). Questo può essere formalizzato come pattern coomologici ricorrenti.

Definiamo operatori di shift metonimico:

$\Phi_{\text{container} \rightarrow \text{content}}: F_{\text{contenitore}} \rightarrow F_{\text{contenuto}}$

Questo operatore prende fasci di contenitori fisici e genera fasci di contenuti:

- $F_{\text{bottiglia}}$  (oggetto fisico)  $\rightarrow F_{\text{liquido\_in\_bottiglia}}$  (contenuto)
- Preservando alcune relazioni topologiche (contenitori vicini hanno contenuti correlati)

La sistematicità cross-linguistica di certi shift metonimici suggerirebbe che gli operatori  $\Phi$  hanno origine cognitiva universale (basati su correlazioni esperienziali universali: contenitori co-occorrono regolarmente con contenuti). La topologia degli spazi coinvolti riflette queste correlazioni.

Pattern coomologici: se la polisemia CONTENITORE/CONTENUTO genera sistematicamente cocicli con struttura specifica (per esempio, sempre 1-cocicli con certe proprietà algebriche), questo pattern può essere identificato, classificato, comparato cross-linguisticamente.

### 29.11 Confronto Sintetico: Fasci vs Semantica Cognitiva

**Potere Esplicativo:** Fasci preservano intuizioni cognitive (embodiment, prototipi, metafore) fornendo rigore formale. Semantica cognitiva ha intuizioni ricche ma formulazione vaga.

**Rigore Formale:** Fasci nettamente superiori. Semantica cognitiva manca formalizzazione precisa.

**Plausibilità Cognitiva:** Semantica cognitiva ha vantaggio su radicamento diretto in percezione/azione. Fasci sono più astratti, ma riducibili a rappresentazioni distribuite plausibili neuralmente.

**Predittività:** Fasci permettono predizioni quantitative (gruppi di coomologia, morfismi), testabili algebricamente. Semantica cognitiva predizioni qualitative.

**Universali vs Variazione:** Semantica cognitiva predice universali via embodiment, ma fatica con variazione cross-linguistica. Fasci permettono modellare sia universali (strutture topologiche condivise) sia variazione (topologie specifiche culturalmente determinate).

**Composizionalità:** Fasci hanno composizionalità topologica rigorosa via morfismi. Semantica cognitiva enfatizza costruzioni olistiche, meno chiara su composizione sistematica.

**Conclusione:** Fasci possono funzionare come formalizzazione rigorosa della semantica cognitiva, preservando intuizioni embodied mentre aggiungendo precisione matematica e potere predittivo.

## Parte IV: Teoria della Pertinenza - Pragmatica Cognitivista

### 29.12 Teoria della Pertinenza: Fondamenti e Architettura

La Teoria della Pertinenza (Relevance Theory), sviluppata da Dan Sperber e Deirdre Wilson a partire dagli anni '80, rappresenta un approccio pragmatico-cognitivo alla comunicazione umana che cerca di spiegare come gli ascoltatori inferiscono il significato inteso del parlante andando oltre il contenuto semantico codificato linguisticamente. La teoria si posiziona come alternativa e raffinamento del framework griceano, mantenendone il nucleo inferenziale ma sostituendo le massime conversazionali multiple con un principio unico di pertinenza.

#### 29.12.1 Principio di Pertinenza e Ottimizzazione Cognitiva

Il cuore teorico della Relevance Theory è costituito da due principi interconnessi:

**Principio Cognitivo di Pertinenza:** La cognizione umana è orientata alla massimizzazione della pertinenza. I sistemi cognitivi umani sono evoluti per allocare risorse attentive preferenzialmente a input che hanno maggiore pertinenza, ovvero che producono maggiori effetti cognitivi (modifiche sostanziali dello stato cognitivo: nuove informazioni, risoluzione di contraddizioni, rafforzamento o indebolimento di assunzioni) con minore sforzo di processamento.

**Principio Comunicativo di Pertinenza:** Ogni atto di comunicazione ostensiva (comportamento intenzionalmente manifesto volto a modificare lo stato cognitivo dell'ascoltatore) porta con sé una presunzione di propria pertinenza ottimale. Specificamente, un atto comunicativo garantisce implicitamente che: a) È sufficientemente rilevante da giustificare lo sforzo di processamento dell'ascoltatore b) È il più rilevante compatibilmente con le abilità e preferenze del parlante

Questi principi trasformano la comunicazione in un processo inferenziale governato da considerazioni di costo-beneficio cognitivo. L'ascoltatore, riconoscendo che il parlante sta comunicando ostensivamente, inferisce che l'enunciato è stato designato per essere ottimamente rilevante. Questo permette all'ascoltatore di generare ipotesi interpretative e testarle in ordine di accessibilità (facilità di recupero contestuale) fino a trovare un'interpretazione che soddisfi le aspettative di pertinenza.

### 29.12.2 Codifica vs Inferenza: Modello Ostensivo-Inferenziale

La Relevance Theory distingue nettamente tra contenuto codificato (ciò che è semanticamente decodificato dall'input linguistico via lessico e grammatica) e contenuto comunicato (ciò che il parlante intende trasmettere, che include molto di più del codificato). La maggior parte del contenuto comunicato emerge attraverso inferenza pragmatica piuttosto che decodifica semantica.

Il modello ostensivo-inferenziale procede attraverso fasi:

1. **Decodifica linguistica:** Il sistema linguistico decodifica la forma fonetica in forma logica, una rappresentazione semantica schematica e massimamente sottodeterminata. Per esempio, "Giovanni è pronto" → PRONTO(GIOVANNI, X, T) dove X è variabile per scopo e T per tempo.
2. **Arricchimento pragmatico:** L'ascoltatore arricchisce la forma logica contestualmente per ottenere un contenuto proposizionale esplicito valutabile per verità (explicature). Questo richiede:
  - Assegnazione di referenti a termini indicali ("Giovanni" → l'individuo Giovanni noto nel contesto)
  - Saturazione di variabili contestuali (X → pronto per partire, T → ora)
  - Risoluzione di ambiguità (strutturali, lessicali)
  - Arricchimento libero (aggiunta di contenuto non richiesto grammaticalmente ma pragmaticamente necessario)
3. **Derivazione di implicature:** Dall'explicature più assunzioni contestuali, l'ascoltatore deriva implicature, conclusioni che il parlante intende che l'ascoltatore tragga ma che non sono esplicitamente affermate. Per esempio:
  - A: "Hai letto il rapporto?"
  - B: "Ero molto stanco ieri sera."
  - Implicatura: B non ha letto il rapporto
4. **Test di pertinenza:** Le interpretazioni candidate (explicature + implicature) sono valutate rispetto a pertinenza: producono effetti cognitivi sufficienti con sforzo ragionevole? L'interpretazione che ottimizza questo rapporto è accettata.

### 29.12.3 Effetti Cognitivi e Sforzo di Processamento

La pertinenza è definita comparativamente: un input  $I_1$  è più rilevante di  $I_2$  in un contesto C se: a)  $I_1$  produce maggiori effetti cognitivi in C che  $I_2$ , a parità di sforzo di processamento, oppure b)  $I_1$  produce gli stessi effetti cognitivi di  $I_2$  con minor sforzo di processamento

Gli **effetti cognitivi** includono:

- Nuove conclusioni derivabili (proposizioni che diventano manifeste)
- Rafforzamento di assunzioni esistenti (aumento di forza)
- Contraddizione ed eliminazione di assunzioni esistenti
- Risoluzione di ambiguità o indeterminazione

Lo **sforzo di processamento** dipende da:

- Accessibilità di assunzioni contestuali richieste per interpretazione
- Complessità di computazione inferenziale necessaria
- Facilità di integrazione con conoscenze preesistenti

L'ottimizzazione della pertinenza guida non solo l'interpretazione linguistica ma l'allocazione attentiva generale: prestiamo attenzione a stimoli che promettono maggiore ritorno cognitivo per investimento di risorse.

## **29.13 Punti di Forza della Teoria della Pertinenza**

### **29.13.1 Parsimonia Esplicativa: Un Principio Unico**

Mentre Grice postula quattro massime (Quantità, Qualità, Relazione, Modo) che operano semi-indipendentemente e talvolta in tensione, Relevance Theory riduce tutto a un principio unico: pertinenza ottimale. Questa parsimonia è teoricamente elegante e predice che tutti i fenomeni pragmatici dovrebbero essere riducibili a ottimizzazione di pertinenza.

Per esempio, le implicature scalari ("alcuni" → "non tutti") sono derivate non da massima di Quantità specifica ma da considerazioni di pertinenza: se il parlante sapesse "tutti", dirlo sarebbe più rilevante (produce effetto cognitivo maggiore con sforzo simile), quindi dicendo "alcuni" implica che "tutti" non è il caso.

Le violazioni apparenti di massime griceane (ironia, metafora, iperbole) non sono davvero violazioni ma ottimizzazioni di pertinenza: l'interpretazione letterale non sarebbe ottimalmente rilevante (richiederebbe sforzo eccessivo o produrrebbe effetti inadeguati), quindi l'ascoltatore cerca interpretazioni non-letterali che ottimizzano pertinenza.

### **29.13.2 Testabilità Empirica e Predizioni Psicolinguistiche**

Relevance Theory fa predizioni psicolinguistiche testabili. Se interpretazione procede per ordine di accessibilità contestuale testando ipotesi fino a soddisfare pertinenza, allora:

- Interpretazioni che richiedono assunzioni contestuali facilmente accessibili dovrebbero essere processate più rapidamente
- Ambiguità dovrebbero essere risolte a favore della lettura che prima soddisfa pertinenza attesa
- Implicature che richiedono computazioni inferenziali complesse dovrebbero mostrare tempi di processamento maggiori

Studi sperimentali hanno testato queste predizioni con successo misto. Effetti di accessibilità contestuale sono robusti: informazioni recenti o salienti nel common ground sono recuperate più rapidamente. Ordinamento di interpretazioni per pertinenza predice pattern di preferenza in ambiguità.

### **29.13.3 Integrazione di Semantica e Pragmatica**

Relevance Theory non traccia linea netta tra semantica e pragmatica ma vede un continuum: il contenuto codificato linguisticamente (semantica) è massimamente

sottodeterminato, e quasi sempre richiede arricchimento pragmatico massiccio per formare contenuti proposizionali completi (explicatures). Non c'è "livello semantico puro" separato dalla pragmatica.

Questo riflette realisticamente come il linguaggio funziona: sottodeterminazione è norma, non eccezione. Distinzione semantica/pragmatica è metodologica (cosa è codificato grammaticalmente vs inferito contestualmente) piuttosto che ontologica (due livelli separati di significato).

## **29.14 Limitazioni della Teoria della Pertinenza**

### **29.14.1 Circolarità e Vaghezza Definitoria**

Una critica fondamentale riguarda potenziale circolarità: pertinenza è definita in termini di effetti cognitivi e sforzo, ma questi concetti non sono formalmente precisi. Cosa conta esattamente come "effetto cognitivo"? Come misuriamo "sforzo di processamento"?

Senza metriche precise, la teoria rischia di essere non falsificabile: qualunque comportamento interpretativo può essere "spiegato" postulando che massimizza pertinenza, ma senza criteri indipendenti per valutare pertinenza, la spiegazione è circolare.

Sperber e Wilson forniscono caratterizzazioni qualitative (effetti cognitivi sono derivazioni di nuove conclusioni, rafforzamenti, contraddizioni), ma manca formalizzazione rigorosa. Quanto rafforzamento conta come un effetto? Le derivazioni sono pesate per importanza? Come?

### **29.14.2 Sottodeterminazione del Principio di Pertinenza**

Il principio di pertinenza è molto generale e potrebbe sottodeterminare interpretazioni. Molteplici interpretazioni potrebbero tutte essere ottimalmente rilevanti a seconda di quali assunzioni contestuali l'ascoltatore accede, quali inferenze computa, come valuta trade-off effetti/sforzo.

La teoria assume che l'ascoltatore testa ipotesi in ordine di accessibilità e accetta la prima che soddisfa pertinenza attesa. Ma questo "first come, first served" può essere troppo semplicistico. Parlanti sofisticati considerano ipotesi multiple, confrontano pertinenza relativa, rivedono interpretazioni iniziali.

Inoltre, cosa succede quando nessuna interpretazione soddisfa pertinenza attesa (parlante incompetente, enunciato genuinamente oscuro)? La teoria predice che l'ascoltatore abbandoni il tentativo o richieda chiarificazione, ma in pratica ascoltatori spesso "accomodano" interpretazioni sub-ottimali.

### **29.14.3 Trattamento Insufficiente di Fenomeni Strutturati**

Relevance Theory, concentrandosi su principio generale di ottimizzazione, può sottostimare fenomeni pragmatici che mostrano struttura grammaticalizzata o convenzionalizzata:

**Particelle discorsive e marcatori pragmatici:** "beh", "allora", "dunque", "insomma" hanno funzioni pragmatiche specifiche (segnalare topic shift, indicare inferenza, gestire aspettative)



che sembrano più convenzionali che puramente inferenziali. La teoria li tratta come "vincoli procedurali" sul processamento, ma questa categoria appare ad hoc.

**Implicature convenzionali:** "Giovanni è povero ma onesto" implica contrasto attraverso "ma", che sembra convenzionale (codificato nella semantica di "ma") piuttosto che inferito da pertinenza. Grice distingue implicature conversazionali (cancellabili) da convenzionali (non cancellabili). Relevance Theory fatica con questa distinzione.

**Atti linguistici indiretti sistematici:** "Puoi passare il sale?" è standardmente interpretato come richiesta, non domanda su abilità. Questo sembra troppo sistematico, convenzionalizzato per essere puramente inferenza da pertinenza. Ci sono pattern ricorrenti cross-linguistici di forme indirette per funzioni specifiche.

## 29.15 Come i Fasci Semantici Integrano e Raffinano Relevance Theory

### 29.15.1 Pertinenza come Struttura Metrica sullo Spazio Contestuale

Il concetto di pertinenza può essere formalizzato rigorosamente attraverso strutture metriche o quasi-metriche sullo spazio contestuale. Definiamo una funzione di pertinenza:

$$R: \text{Contenuti} \times \text{Contesti} \times \text{Stati\_cognitivi} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

che assegna a ogni tripla (contenuto proposizionale  $p$ , contesto  $c$ , stato cognitivo  $S$ ) un valore reale non negativo rappresentante la pertinenza di  $p$  in  $c$  dato  $S$ .

Questo valore può essere scomposto in componenti:

$$R(p, c, S) = \text{Effetti\_cognitivi}(p, S) / \text{Sforzo\_processamento}(p, c, S)$$

dove:

- $\text{Effetti\_cognitivi}(p, S)$  misura quanto lo stato cognitivo  $S$  è modificato dall'aggiunta di  $p$  (quante nuove inferenze, quanto rafforzamento, quante contraddizioni risolte)
- $\text{Sforzo\_processamento}(p, c, S)$  misura risorse cognitive richieste per processare  $p$  in  $c$  dato  $S$  (accessibilità di assunzioni contestuali, complessità computazionale di inferenze)

Entrambe le componenti possono essere formalizzate attraverso fasci. Gli effetti cognitivi corrispondono alla "distanza" topologica tra  $S$  e  $S+p$  (stato cognitivo dopo integrazione di  $p$ ). Se aggiungere  $p$  produce cambiamenti topologici grandi (molte sezioni del fascio epistemico  $F_S$  sono modificate), gli effetti cognitivi sono alti.

Lo sforzo di processamento corrisponde alla "distanza" nella topologia contestuale tra il contesto  $c$  e i contesti dove le assunzioni richieste per inferire  $p$  sono facilmente accessibili. Se  $c$  è vicino topologicamente a contesti dove le assunzioni sono salienti, lo sforzo è basso.

La pertinenza ottimale diventa condizione topologica: dato uno spazio di interpretazioni possibili (fascio  $F_{\text{interpretazioni}}$ ), l'interpretazione ottimale  $s^*$  è quella che massimizza  $R$  localmente:

$$s^* = \operatorname{argmax}_{\{s \in F_{\text{interpretazioni}}(U_c)\}} R(s, c, S)$$

dove  $U_c$  è l'aperto contenente il contesto corrente  $c$ .

### 29.15.2 Explicatures come Sezioni di Fasci Arricchiti

L'arricchimento pragmatico che trasforma forme logiche sottodeterminate in explicatures valutabili per verità può essere modellato come operazione di sheafification o selezione di sezioni in fasci arricchiti.

La forma logica decodificata è prefascio  $F_{LF}$  con sezioni altamente sottodeterminate (contenenti variabili libere, ambiguità non risolte). L'arricchimento contestuale applica operatori:

$$\Phi_{\text{arricchimento}}: F_{LF} \rightarrow F_{\text{explicature}}$$

dove  $F_{\text{explicature}}$  è fascio (non prefascio) di contenuti proposizionali completi. L'operatore:

- Satura variabili contestuali (tempo, luogo, scopo)
- Risolve ambiguità (seleziona una lettura tra alternative)
- Aggiunge contenuto implicito ma pragmaticamente necessario

Le mappe di restrizione di  $F_{\text{explicature}}$  garantiscono coerenza: arricchimenti in sottocontesti sono compatibili, incollabili globalmente se soddisfano condizioni di fascio.

La pertinenza guida la selezione: tra molteplici arricchimenti possibili (sezioni diverse di  $F_{\text{explicature}}$ ), selezioniamo quello che massimizza  $R$  dato contesto e stato cognitivo correnti.

### 29.15.3 Implicature come Cocicli di Fasci Pragmatici

Le implicature possono essere modellate attraverso struttura coomologica, come abbiamo discusso precedentemente. Un'implicatura è proposizione non esplicitamente affermata ma inferita attraverso ragionamento pragmatico governato da pertinenza.

Formalizziamo: dato fascio  $F_{\text{esplicito}}$  di contenuti espliciti e fascio  $F_{\text{implicito}}$  di contenuti impliciti, le implicature emergono attraverso morfismo:

$$\varphi_{\text{implic}}: F_{\text{esplicito}} \times F_{\text{pertinenza}} \rightarrow F_{\text{implicito}}$$

dove  $F_{\text{pertinenza}}$  codifica vincoli di pertinenza (effetti cognitivi attesi, sforzo tollerabile) come struttura topologica sullo spazio contestuale.

Le implicature che emergono sono sezioni di  $F_{\text{implicito}}$  compatibili con sezioni di  $F_{\text{esplicito}}$  via  $\varphi_{\text{implic}}$ . Se queste sezioni implicite non incollano globalmente (falliscono condizione di fascio), otteniamo cocicli non banali che misurano tensione o incoerenza nell'implicatura.

La cancellabilità delle implicature (non sono semanticamente codificate) corrisponde al fatto che  $\varphi_{\text{implic}}$  non è morfismo rigido: varia contestualmente, può essere nullo in certi contesti (implicatura scomparire).

#### 29.15.4 Accessibilità Contestuale come Topologia sullo Spazio Cognitivo

L'ordine di accessibilità con cui l'ascoltatore testa ipotesi interpretative può essere modellato topologicamente. Definiamo spazio cognitivo  $S$  degli stati possibili dell'ascoltatore, dotato di topologia dove aperti rappresentano "regioni di facilità di accesso".

Un'assunzione contestuale  $\alpha$  è accessibile da stato cognitivo  $s$  se  $\alpha$  appartiene a un intorno aperto piccolo  $U_s$  di  $s$ . Assunzioni in  $U_s$  sono quelle che l'ascoltatore può recuperare con sforzo minimo dato il suo stato corrente.

L'interpretazione procede espandendo topologicamente: si parte dal contesto locale immediato (intorno piccolo), si testano interpretazioni basate solo su assunzioni in questo intorno. Se nessuna soddisfa pertinenza, si espande topologicamente a intorni più grandi (assunzioni meno accessibili), fino a trovare interpretazione ottimale.

Questo modello predice:

- Interpretazioni che richiedono solo assunzioni localmente accessibili sono preferite (processate prima)
- Espansione contestuale ha costi crescenti (intorni più grandi  $\rightarrow$  sforzo maggiore)
- Limiti cognitivi corrispondono a limiti sulla dimensione di intorni esplorabili

#### 29.16 Confronto Sintetico: Fasci vs Teoria della Pertinenza

**Potere Esplicativo:** Entrambi trattano dipendenza contestuale sistematicamente. Relevance Theory enfatizza ottimizzazione cognitiva, fasci enfatizzano struttura topologica. Complementari.

**Rigore Formale:** Fasci superiori. Relevance Theory usa concetti cognitivi (pertinenza, effetti, sforzo) non completamente formalizzati. Fasci formalizzano questi concetti topologicamente.

**Testabilità Empirica:** Relevance Theory fa predizioni psicolinguistiche dirette. Fasci permettono predizioni ma richiedono operazionalizzazione (misurare topologie cognitive). Entrambi testabili ma diversamente.

**Composizionalità:** Fasci hanno composizionalità topologica rigorosa. Relevance Theory meno chiara su composizione sistematica (arricchimento è processo inferenziale globale).

**Trattamento di Fenomeni Convenzionali:** Fasci possono modellare sia fenomeni inferenziali (via coomologia) sia convenzionali (via sotto-fasci rigidi). Relevance Theory fatica con convenzionalizzazioni.

**Plausibilità Cognitiva:** Relevance Theory direttamente motivata da considerazioni cognitive (efficienza, ottimizzazione). Fasci più astratti ma riducibili a rappresentazioni distribuite.

**Conclusione:** Fasci possono funzionare come formalizzazione matematica rigorosa dei principi della Relevance Theory, fornendo precisione formale che arricchisce il potere predittivo senza sacrificare le intuizioni cognitive fondamentali.

## Conclusioni del Capitolo 29: Sintesi Comparativa Finale

Dopo aver esaminato sistematicamente come l'approccio dei fasci semantici si confronta con tre paradigmi teorici maggiori (semantica vero-condizionale, semantica cognitiva, teoria della pertinenza), possiamo ora articolare una sintesi comparativa che evidenzia i contributi distintivi e il posizionamento dell'approccio dei fasci nel panorama teorico contemporaneo.

### 29.17 Contributi Distintivi dell'Approccio dei Fasci

L'analisi comparativa rivela che la teoria dei fasci non è semplicemente un'alternativa tra molte ma offre innovazioni concettuali e formali specifiche che ne giustificano l'introduzione:

**1. Formalizzazione Rigorosa della Dipendenza Contestuale:** Mentre tutte le teorie riconoscono dipendenza contestuale, solo i fasci forniscono framework matematico rigoroso (topologia, mappe di restrizione, condizioni di incollamento) che formalizza precisamente come significati variano localmente ma coerentemente globalmente.

**2. Trattamento Unificato di Fenomeni Eterogenei:** Fasci permettono modellare sotto un'unica architettura matematica fenomeni diversi (polisemia, presupposizioni, implicature, vaghezza, metafore) che frameworks alternativi trattano con meccanismi separati ad hoc.

**3. Strumenti per Misurare Ostruzioni:** La coomologia dei fasci fornisce strumenti unici per quantificare e classificare ostruzioni all'interpretazione globale coerente, fenomeno riconosciuto intuitivamente ma non matematicamente caratterizzato in altri frameworks.

**4. Integrazione di Aspetti Logici e Cognitivi:** Fasci combinano rigore formale della semantica vero-condizionale con sensibilità a embodiment e processamento cognitivo della semantica cognitiva, superando falsa dicotomia formalismo/cognitivismo.

**5. Predittività Quantitativa:** Attraverso calcoli coomologici, morfismi, topologie, i fasci permettono predizioni quantitative testabili algebricamente, andando oltre predizioni qualitative di frameworks meno formalizzati.

### 29.18 Complementarietà Teorica e Possibilità di Sintesi

Piuttosto che vedere i fasci come rivali incompatibili con approcci esistenti, la nostra analisi suggerisce possibilità di sintesi costruttiva:

**Fasci + Semantica Vero-Condizionale:** I fasci possono estendere la semantica vero-condizionale incorporando la struttura locale-globale che manca alla teoria classica. Le condizioni di verità diventano sezioni locali del fascio, con topologia contestuale che governa variazione sistematica.

**Faschi + Semantica Cognitiva:** I faschi formalizzano intuizioni embodied (schemi immagine, prototipi, metafore) preservando il contenuto cognitivo mentre aggiungendo precisione matematica. Schemi immagine diventano strutture topologiche, metafore morfismi tra faschi.

**Faschi + Relevance Theory:** I faschi matematizzano principi di pertinenza e processamento inferenziale, fornendo metriche topologiche per effetti cognitivi e sforzo di processamento che rimangono vaghi nella formulazione originale.

Una teoria semantica veramente comprensiva potrebbe integrare tutte queste prospettive: rigore vero-condizionale per semantica compositiva, embodiment cognitivo per radicamento percettivo, pertinenza per pragmatica inferenziale, faschi come architettura unificante formale.

## 29.19 Direzioni per Ricerca Futura

Il confronto sistematico suggerisce diverse direzioni promettenti per ricerca futura:

**Empirica:** Testare predizioni specifiche dei faschi (pattern coomologici in polisemia, effetti di topologia contestuale sul processamento) attraverso esperimenti psicolinguistici, studi corpus-based, modellazione computazionale.

**Formale:** Sviluppare ulteriormente teoria matematica ( $\infty$ -faschi per dipendenze di ordine superiore, faschi derivati per ostruzioni multiple, integrazione con teoria delle categorie superiori).

**Applicativa:** Implementare semantica basata su faschi in sistemi NLP, question answering, traduzione automatica, verificare se offre vantaggi pratici oltre eleganza teorica.

**Comparativa:** Estendere il confronto ad altri frameworks non trattati qui (semantica dinamica, teoria della rappresentazione discorsiva, semantica intensionale) per mappare completamente lo spazio teorico.

Il viaggio teoretico è lungi dall'essere completato, ma l'approccio dei faschi ha dimostrato attraverso questo confronto sistematico di avere le credenziali formali, il potere esplicativo e la capacità integrativa per costituire un contributo duraturo alla semantica teorica.

La teoria dei faschi offre alla semantica linguistica strumenti matematici di potenza e generalità senza precedenti, aprendo frontiere di ricerca che solo ora iniziamo a esplorare. Il significato linguistico, visto attraverso questa lente, rivela la sua profonda struttura geometrica: locale ma globalmente coerente, contestualmente dipendente ma topologicamente vincolato, dinamicamente variabile ma matematicamente trattabile.

## Bibliografia Essenziale (Selezione Indicativa)

### Teoria Matematica dei Fasci:

- Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry*. Springer.
- Mac Lane, S. & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic*. Springer.
- Tennison, B.R. (1975). *Sheaf Theory*. Cambridge University Press.

### Semantica Formale e Pragmatica:

- Grice, H.P. (1989). *Studies in the Way of Words*. Harvard University Press.
- Kamp, H. & Reyle, U. (1993). *From Discourse to Logic*. Kluwer.
- Montague, R. (1974). *Formal Philosophy*. Yale University Press.
- Portner, P. & Partee, B.H. (2002). *Formal Semantics: The Essential Readings*. Blackwell.

### Topologia e Logica Modale:

- Blackburn, P., de Rijke, M., & Venema, Y. (2001). *Modal Logic*. Cambridge University Press.
- Vickers, S. (1989). *Topology via Logic*. Cambridge University Press.

### Teoria delle Categorie in Linguistica:

- Coecke, B., Sadrzadeh, M., & Clark, S. (2010). "Mathematical Foundations for Distributed Compositional Model of Meaning". *Linguistic Analysis*, 36.